This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

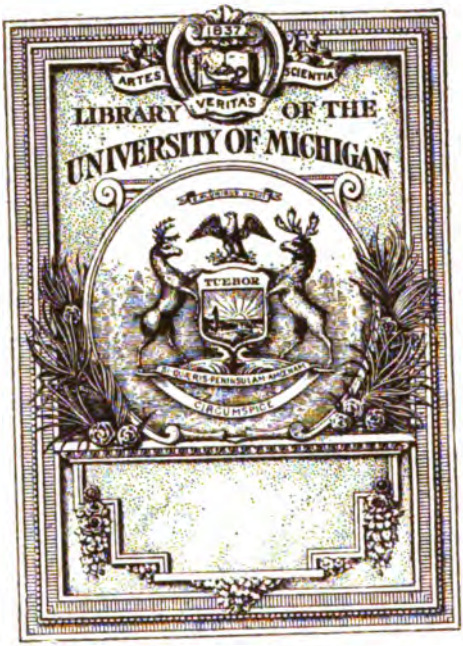
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
845
.A36
1796

First ed. 1743, see this Vol. p. XXXI.

U. of Mich. has Second ed. 1758; d'Alembert died 1783; l. present (3d) is a reimpr. of the 1758 ed.; on p. XXV there is a ref. to 1769; but (numbered) ff. notes ~~seem to be by l. editor of l. 1796 ed.~~ are in 1st ed. as are due to Bezout. (Korn.)

186 Alexander Ziwet 117

TRAITÉ

DE

DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIS DE L'ÉQUILIBRE et du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, et démontrées d'une manière nouvelle, et où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque.

PAR M. D'ALEMBERT, *de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse et d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suède, et de l'Institut de Boulogne.*

A PARIS,

Chez FUCHS, Libraire, rue des Mathurins, maison de Cluni.

M. DCC. XCVI.

Prof. Alex. Ziwet.
gr.
12-17-1923

AVERTISSEMENT.

CETTE seconde Edition est augmentée de plus d'un tiers.

On a ajouté au Discours préliminaire quelques réflexions sur la question des forces vives, et l'examen d'une autre question importante, proposée par l'Académie Royale des Sciences de Prusse, *si les lois de la Statique et de la Méchanique sont de vérité nécessaire ou contingente ?*.

Dans la première Partie de l'Ouvrage, ce qui regarde la mesure et la comparaison des forces accélératrices est expliqué avec beaucoup plus de détail que dans la première Edition, et contient sur cette matière des remarques qu'on ne trouvera point ailleurs; on a inséré aussi dans cette première Partie, plusieurs nouvelles recherches sur les lois de l'équilibre.

AVERTISSEMENT.

Les additions principales de la seconde Partie, sont quelques propositions sur l'état du centre de gravité de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres ; la solution complette d'un Problême de Dynamique, qui n'avoit été qu'imparfaitement résolu jusqu'ici, parce qu'on n'avoit pu séparer les indéterminées de l'équation finale (ce Problême se trouve art. 97 et suivans) ; une solution beaucoup plus simple du Problême V, sur le mouvement d'un fil chargé de plusieurs poids, avec un grand nombre de réflexions curieuses sur ce Problême ; une solution plus détaillée et en même tems plus simple du Problême des Corps qui vacillent sur des plans ; enfin des recherches nouvelles et des observations importantes sur le choc des Corps à ressort. Je ne parle point de plusieurs autres additions moins considéra-

bles répandues dans le corps de l'Ouvrage, et qui ont principalement pour but de développer davantage ce qui m'a paru en avoir besoin. Mais je ne dois pas laisser ignorer les obligations que j'ai à M. Bezout de l'Académie Royale des Sciences, qui a bien voulu me fournir pour cette Edition un grand nombre de notes, dont l'objet est de mettre l'Ouvrage à la portée d'un beaucoup plus grand nombre de Lecteurs qu'il ne l'étoit dans la première Edition. Ces notes, au nombre de plus de soixante, sont au bas du Texte.

Quoique cette nouvelle Edition soit déja fort augmentée, mon dessein étoit d'y ajouter encore plusieurs autres morceaux, la plupart composés depuis long-tems, et qui ont tous rapport à la Dynamique. Ces morceaux étoient 1°. (*) Des recherches sur le mou-

(*) Ces différens morceaux se trouvent avec beaucoup d'autres Mémoires très-intéressans dans les huit volumes d'*Opus-*

vement d'un corps qui tourne autour d'un axe mobile; Problême du même genre que celui *de la précession des Equinoxes;* l'Ouvrage que j'ai mis au jour sur ce dernier sujet en 1749, contient tous les principes nécessaires pour résoudre le Problême général dont il s'agit; et les recherches dont je parle ici, et que je voulois joindre à ce Traité, ne sont que l'application de ces principes. 2°. (*) Plusieurs additions à l'Essai d'Hydrodynamique entiérement neuf que j'ai donné dans les Chap. VIII et IX de ma *Théorie de la résistance des fluides*, publiée en 1752; ces additions ont pour objet de faire voir que cet Essai d'Hydrodynamique,

---

cules Mathématiques de l'Auteur. Pour les recherches dont il est question ici, voyez *Opusc.* Tom. I, pag. 74. — Tom. IV, pag. 1. — *Ibid.* pag. 32. — Tom. V, pag. 251. — Tom. VII, pag. 372

(*) Voyez *Opusc.* Tom. I, pag. 137. — Tom. V, 30e. et 31e. Mémoires. — Tom. VI, pag. 379. — Tom. VIII, pag. 1 — *Ibid.* pag. 52.

quoique très-court, renferme une Méthode aussi générale qu'on le puisse désirer pour soumettre au calcul le mouvement des fluides, et de déterminer en même tems le petit nombre de cas dans lesquels on peut appliquer *rigoureusement* le calcul à la recherche de ce mouvement. 3°. (*) Une théorie des oscillations des Corps flottans, pour servir de supplément à celle que j'avois ébauchée dans le Chapitre VI de mon *Essai*, déja cité, *de la résistance des fluides*. 4°. (**) Un écrit assez étendu sur les vibrations des cordes sonores, en réponse aux objections qui m'ont été faites sur ce sujet dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1753, par deux grands Géomètres, Mrs Bernoulli et Euler, divisés d'ailleurs entr'eux, même dans ce qu'ils me contestent, puisque l'un

(*) Voyez *Opusc.* Tom. I, pag. 104.
(**) Voyez *Opusc.* Tom. I.

m'accorde ce que l'autre me nie. 5°. (*) Enfin une démonstration du principe de la composition des forces, à la vérité moins simple que celle qui a été donnée dans l'article 28 de cet Ouvrage, mais que je crois cependant n'être pas indifférente pour les Mathématiciens, par le moyen que j'ai trouvé de simplifier la démonstration très-ingénieuse de ce même principe, qu'on peut lire dans le premier Tome des *Mémoires de Pétersbourg*. Mais ces différentes additions, quoique toutes intéressantes par leur objet, auroient trop grossi le Volume que je mets au jour; je me propose donc de les publier, ensemble ou séparément, dans quelqu'autre occasion.

(*) Voyez *Opusc.* Tom. I, pag. 169. *Mém. de l'Académie des Sciences de Paris* 1769, pag. 285. *Opusc.* Vol. VI, pag. 360.

DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

LA certitude des Mathématiques est un avantage que ces Sciences doivent principalement à la simplicité de leur objet. Il faut avouer même que, comme toutes les parties des Mathématiques n'ont pas un objet également simple, aussi la certitude proprement dite, celle qui est fondée sur des principes nécessairement vrais et évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même manière à toutes ces parties. Plusieurs d'entr'elles, appuyées sur des principes physiques, c'est-à-dire, sur des vérités d'expérience, ou sur de simples hypothèses, n'ont, pour ainsi dire, qu'une certitude d'expérience, ou même de pure supposition. Il n'y a, pour parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, et des propriétés générales de l'étendue, c'est-à-dire, l'Algébre, la Géométrie et la Méchanique, qu'on puisse regarder comme marquées au sceau de l'évidence. Encore y a-t-il dans la lumière que ces Sciences présentent à notre esprit, une espèce de gradation, et, pour ainsi dire, de nuance

à observer. Plus l'objet qu'elles embrassent est étendu, et considéré d'une manière générale et abstraite, plus aussi leurs principes sont exempts de nuages et faciles à saisir. C'est par cette raison que la Géométrie est plus simple que la Méchanique, et l'une et l'autre moins simples que l'Algébre. Ce paradoxe ne paroîtra point tel à ceux qui ont étudié ces Sciences en Philosophes : les notions les plus abstraites, celles que le commun des hommes regarde comme les plus inaccessibles, sont souvent celles qui portent avec elles une plus grande lumière : l'obscurité semble s'emparer de nos idées à mesure que nous examinons dans un objet plus de propriétés sensibles ; l'impénétrabilité, ajoutée à l'idée de l'étendue, semble ne nous offrir qu'un mystère de plus ; la nature du mouvement est une énigme pour les Philosophes ; le principe Métaphysique des lois de la percussion ne leur est pas moins caché ; en un mot plus ils approfondissent l'idée qu'ils se forment de la matière, et des propriétés qui la représentent, plus cette idée s'obscurcit et paroît vouloir leur échapper ; plus ils se persuadent que l'existence des objets extérieurs, appuyée sur le témoignage équivoque de nos sens, est ce que nous connoissons le moins imparfaitement en eux.

Il résulte de ces réflexions, que pour traiter

suivant la meilleure Méthode possible quelque partie des Mathématiques que ce soit (nous pourrions même dire quelque Science que ce puisse être), il est nécessaire non-seulement d'y introduire et d'y appliquer autant qu'il se peut, des connoissances puisées dans des Sciences plus abstraites, et par conséquent plus simples, mais encore d'envisager de la manière la plus abstraite et la plus simple qu'il se puisse, l'objet particulier de cette Science; de ne rien supposer, ne rien admettre dans cet objet, que les propriétés que la Science même qu'on traite y suppose. De là résultent deux avantages : les principes reçoivent toute la clarté dont ils sont susceptibles : ils se trouvent d'ailleurs réduits au plus petit nombre possible, et par ce moyen ils ne peuvent manquer d'acquérir en même tems plus d'étendue, puisque l'objet d'une Science étant nécessairement déterminé, les principes en sont d'autant plus féconds, qu'ils sont en plus petit nombre.

On a pensé depuis long-tems, et même avec succès, à remplir dans les Mathématiques, une partie du plan que nous venons de tracer : on a appliqué heureusement, l'Algébre à la Géométrie, la Géométrie à la Méchanique, et chacune de ces trois Sciences à toutes les autres, dont elles sont la base et le fondement. Mais on n'a pas été si attentif, ni à réduire les principes de ces Scien-

ces au plus petit nombre, ni à leur donner toute la clarté qu'on pouvoit désirer. La Méchanique surtout, est celle qu'il paroît qu'on a négligée le plus à cet égard : aussi la plupart de ses principes, ou obscurs par eux-mêmes, ou énoncés et démontrés d'une manière obscure, ont-ils donné lieu à plusieurs questions épineuses. En général, on a été plus occupé jusqu'à présent à augmenter l'édifice qu'à en éclairer l'entrée ; et on a pensé principalement à l'élever, sans donner à ses fondemens toute la solidité convenable.

Je me suis proposé dans cet Ouvrage de satisfaire à ce double objet, de reculer les limites de la Méchanique, et d'en applanir l'abord ; et mon but principal a été de remplir en quelque sorte un de ces objets par l'autre, c'est-à-dire, non-seulement de déduire les principes de la Méchanique des notions les plus claires, mais de les appliquer aussi à de nouveaux usages ; de faire voir tout à la fois, et l'inutilité de plusieurs principes qu'on avoit employés jusqu'ici dans la Méchanique, et l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science ; en un mot, d'étendre les principes en les réduisant. Telles ont été mes vues dans le Traité que je mets au jour. Pour faire connoître au Lecteur les moyens par lesquels j'ai tâché de les remplir, il ne sera peut-être pas inutile d'entrer ici dans

un examen raisonné de la Science que j'ai entrepris de traiter.

Le Mouvement et ses propriétés générales, sont le premier et le principal objet de la Méchanique ; cette Science suppose l'existence du Mouvement, et nous la supposerons aussi comme avouée et reconnue de tous les Physiciens. A l'égard de la nature du Mouvement, les Philosophes sont au contraire fort partagés là-dessus. Rien n'est plus naturel, je l'avoue, que de concevoir le Mouvement comme l'application successive du mobile aux différentes parties de l'espace indéfini, que nous imaginons comme le lieu des corps : mais cette idée suppose un espace dont les parties soient pénétrables et immobiles ; or personne n'ignore que les Cartésiens (Secte qui à la vérité n'existe presque plus aujourd'hui) ne reconnoissent point d'espace distingué des corps, et qu'ils regardent l'étendue et la matière comme une même chose. Il faut convenir qu'en partant d'un pareil principe, le Mouvement seroit la chose la plus difficile à concevoir, et qu'un Cartésien auroit peut-être beaucoup plutôt fait d'en nier l'existence, que de chercher à en définir la nature. Au reste, quelque absurde que nous paroisse l'opinion de ces Philosophes, et quelque peu de clarté et de précision qu'il y ait dans les Principes Métaphysiques sur lesquels ils s'efforcent de l'appuyer, nous n'en-

treprendrons point de la réfuter ici : nous nous contenterons de remarquer, que pour avoir une idée claire du Mouvement, on ne peut se dispenser de distinguer au moins par l'esprit deux sortes d'étendue : l'une, qui soit regardée comme impénétrable, et qui constitue ce qu'on appelle proprement les corps ; l'autre, qui étant considérée simplement comme étendue, sans examiner si elle est pénétrable ou non, soit la mesure de la distance d'un corps à un autre, et dont les parties envisagées comme fixes et immobiles, puissent servir à juger du repos ou du mouvement des corps. Il nous sera donc toujours permis de concevoir un espace indéfini comme le lieu des corps, soit réel, soit supposé, et de regarder le Mouvement comme le transport du mobile d'un lieu dans un autre.

La considération du Mouvement entre quelquefois dans les recherches de Géométrie pure ; c'est ainsi qu'on imagine souvent les lignes, droites ou courbes, engendrées par le Mouvement continu d'un point, les surfaces par le Mouvement d'une ligne, les solides enfin par celui d'une surface. Mais il y a entre la Méchanique et la Géométrie cette différence, non-seulement que dans celle-ci, la génération des Figures par le Mouvement est, pour ainsi dire, arbitraire, et de pure élégance, mais encore que la Géométrie ne considère dans le Mouvement que l'espace parcouru, au lieu que

dans la Méchanique on a égard de plus au tems que le mobile employe à parcourir cet espace.

On ne peut comparer ensemble deux choses d'une nature différente, telles que l'espace et le tems : mais on peut comparer le rapport des parties du tems avec celui des parties de l'espace parcouru. Le tems par sa nature coule uniformément, et la Méchanique suppose cette uniformité. Du reste, sans connoître le tems en lui-même et sans en avoir de mesure précise, nous ne pouvons représenter plus clairement le rapport de ses parties, que par celui des portions d'une ligne droite indéfinie. Or l'analogie qu'il y a entre le rapport des parties d'une telle ligne, et celui des parties de l'espace parcouru par un corps qui se meut d'une manière quelconque, peut toujours être exprimée par une équation : on peut donc imaginer une courbe, dont les abscisses représentent les portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, les ordonnées correspondantes désignant les espaces parcourus durant ces portions de tems : l'équation de cette courbe exprimera, non le rapport des tems aux espaces, mais, si on peut parler ainsi, le rapport du rapport que les parties de tems ont à leur unité, à celui que les parties de l'espace parcouru ont à la leur. Car l'équation d'une courbe peut être considérée, ou comme exprimant le rapport des ordonnées aux

abscisses, ou comme l'équation entre le rapport que les ordonnées ont à leur unité, et le rapport que les abscisses correspondantes ont à la leur.

Il est donc évident que par l'application seule de la Géométrie et du calcul, on peut, sans le secours d'aucun autre principe, trouver les propriétés générales du Mouvement, varié suivant une loi quelconque. Mais comment arrive-t-il que le Mouvement d'un corps suive telle ou telle loi particulière? C'est sur quoi la Géométrie seule ne peut rien nous apprendre, et c'est aussi ce qu'on peut regarder comme le premier Problême qui appartienne immédiatement à la Méchanique.

On voit d'abord fort clairement, qu'un corps ne peut se donner le Mouvement à lui-même. Il ne peut donc être tiré du repos, que par l'action de quelque cause étrangère. Mais continue-t-il à se mouvoir de lui-même, ou a-t-il besoin pour se mouvoir de l'action répétée de la cause? Quelque parti qu'on pût prendre là-dessus, il sera toujours incontestable, que l'existence du Mouvement étant une fois supposée sans aucune autre hypothèse particulière, la loi la plus simple qu'un mobile puisse observer dans son Mouvement, est la loi d'uniformité, et c'est par conséquent celle qu'il doit suivre, comme on le verra plus au long dans le premier Chapitre de ce Traité. Le Mouvement est donc uniforme par sa nature : j'avoue que les

preuves qu'on a données jusqu'à présent de ce principe, ne sont peut-être pas fort convaincantes : on verra dans mon Ouvrage les difficultés qu'on peut y opposer, et le chemin que j'ai pris pour éviter de m'engager à les résoudre. Il me semble que cette loi d'uniformité essentielle au Mouvement considéré en lui-même, fournit une des meilleures raisons sur lesquelles la mesure du tems par le Mouvement uniforme puisse être appuyée. Aussi j'ai cru devoir entrer là-dessus dans quelque détail, quoiqu'au fond cette discussion puisse paroître étrangère à la Méchanique.

La *force d'inertie*, c'est à-dire, la propriété qu'ont les Corps de persévérer dans leur état de repos ou de Mouvement, étant une fois établie, il est clair que le Mouvement, qui a besoin d'une cause pour commencer au moins à exister, ne sauroit non plus être accéléré ou retardé que par une cause étrangère. Or quelles sont les causes capables de produire ou de changer le Mouvement dans les Corps ? Nous n'en connoissons jusqu'à présent que de deux sortes : les unes se manifestent à nous en même-tems que l'effet qu'elles produisent, ou plutôt dont elles sont l'occasion : ce sont celles qui ont leur source dans l'action sensible et mutuelle des Corps, résultante de leur impénétrabilité : elles se réduisent à l'impulsion et à quelques autres actions dérivées de celle-là : toutes les autres causes ne se font

connoître que par leur effet, et nous en ignorons entièrement la nature : telle est la cause qui fait tomber les Corps pesans vers le centre de la terre, celle qui retient les Planètes dans leurs orbites, etc.

Nous verrons bientôt comment on peut déterminer les effets de l'impulsion, et des causes qui peuvent s'y rapporter : pour nous en tenir à celles de la seconde espèce, il est clair que lorsqu'il est question des effets produits par de telles causes, ces effets doivent toujours être donnés indépendamment de la connoissance de la cause, puisqu'ils ne peuvent en être déduits : c'est ainsi que sans connoître la cause de la pesanteur, nous apprenons par l'expérience que les espaces décrits par un Corps qui tombe, sont entr'eux comme les quarrés des tems. En général, dans les Mouvemens variés dont les causes sont inconnues, il est évident que l'effet produit par la cause, soit dans un tems fini, soit dans un instant, doit toujours être donné par l'équation entre les tems et les espaces : cet effet une fois connu, et le principe de la force d'inertie supposé, on n'a plus besoin que de la Géométrie seule et du calcul, pour découvrir les propriétés de ces sortes de Mouvemens. Pourquoi donc aurions-nous recours à ce principe dont tout le monde fait usage aujourd'hui, que la force accélératrice ou retardatrice est proportionnelle à l'élément de la vîtesse ? principe appuyé sur cet

unique axiome vague et obscur, que l'effet est proportionnel à sa cause. Nous n'examinerons point si ce principe est de vérité nécessaire; nous avouerons seulement que les preuves qu'on en a apportées jusqu'ici, ne nous paroissent pas hors d'atteinte : nous ne l'adopterons pas non plus, avec quelques Géomètres, comme de vérité purement contingente, ce qui ruineroit la certitude de la Méchanique, et la réduiroit à n'être plus qu'une Science expérimentale : nous nous contenterons d'observer, que vrai ou douteux, clair ou obscur, il est inutile à la Méchanique, et que par conséquent il doit en être banni.

Nous n'avons fait mention jusqu'à présent, que du changement produit dans la vîtesse du mobile par les causes capables d'altérer son Mouvement : et nous n'avons point encore cherché ce qui doit arriver, si la cause motrice tend à mouvoir le corps dans une direction différente de celle qu'il a déja. Tout ce que nous apprend dans ce cas le principe de la force d'inertie, c'est que le mobile ne peut tendre qu'à décrire une ligne droite, et à la décrire uniformément : mais cela ne fait connoître ni sa vîtesse ni sa direction. On est donc obligé d'avoir recours à un second principe, c'est celui qu'on appelle la composition des Mouvemens, et par lequel on détermine le Mouvement unique d'un Corps qui tend à se mouvoir suivant différen-

tes directions à la fois avec des vîtesses données. On trouvera dans cet Ouvrage une démonstration nouvelle de ce principe, dans laquelle je me suis proposé, et d'éviter toutes les difficultés auxquelles sont sujettes les démonstrations qu'on en donne communément, et en même-tems de ne pas déduire d'un grand nombre de propositions compliquées, un principe qui étant l'un des premiers de la Méchanique, doit nécessairement être appuyé sur des preuves simples et faciles.

Comme le Mouvement d'un Corps qui change de direction, peut être regardé comme composé du Mouvement qu'il avoit d'abord et d'un nouveau Mouvement qu'il a reçu, de même le Mouvement que le Corps avoit d'abord peut-être regardé comme composé du nouveau Mouvement qu'il a pris, et d'un autre qu'il a perdu. De là il s'ensuit que les lois du Mouvement changé par quelques obstacles que ce puisse être, dépendent uniquement des lois du Mouvement détruit par ces mêmes obstacles. Car il est évident qu'il suffit de décomposer le Mouvement qu'avoit le Corps avant la rencontre de l'obstacle, en deux autres Mouvemens, tels, que l'obstacle ne nuise point à l'un, et qu'il anéantisse l'autre. Par-là, on peut non-seulement démontrer les lois du Mouvement changé par des obstacles insurmontables, les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette Méthode; on peut encore déter-

miner dans quel cas le Mouvement est détruit par ces mêmes obstacles. A l'égard des lois du Mouvement changé par des obstacles qui ne sont pas insurmontables en eux-mêmes, il est clair par la même raison, qu'en général il ne faut pour déterminer ces lois, qu'avoir bien constaté celles de l'équilibre.

Or quelle doit être la loi générale de l'équilibre des Corps! Tous les Géomètres conviennent, que deux Corps dont les directions sont opposées, se font équilibre quand leurs masses sont en raison inverse des vîtesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir; mais il n'est peut-être pas facile de démontrer cette loi en toute rigueur, et d'une manière qui ne renferme aucune obscurité; aussi la plupart des Géomètres ont-ils mieux aimé la traiter d'axiome, que de s'appliquer à la prouver. Cependant, si l'on y fait attention, on verra qu'il n'y a qu'un seul cas où l'équilibre se manifeste d'une manière claire et distincte; c'est celui où les masses des deux Corps sont égales, et leurs vîtesses égales et opposées. Le seul parti qu'on puisse prendre, ce me semble, pour démontrer l'équilibre dans les autres cas, est de les réduire, s'il se peut, à ce premier cas simple et évident par lui-même. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire; le Lecteur jugera si j'y ai réussi.

Le Principe de l'équilibre joint à ceux de la force

d'inertie et du Mouvement composé, nous conduit donc à la solution de tous les Problêmes où l'on considère le Mouvement d'un Corps, en tant qu'il peut être altéré par un obstacle impénétrable et mobile, c'est-à-dire, en général par un autre Corps à qui il doit nécessairement communiquer du Mouvement pour conserver au moins une partie du sien. De ces principes combinés on peut donc aisément déduire les lois du Mouvement des Corps qui se choquent d'une manière quelconque, ou qui se tirent par le moyen de quelque Corps interposé entr'eux, et auquel ils sont attachés.

Si les Principes de la force d'inertie, du Mouvement composé, et de l'équilibre, sont essentiellement différens l'un de l'autre, comme on ne peut s'empêcher d'en convenir; et si d'un autre côté, ces trois Principes suffisent à la Méchanique, c'est avoir réduit cette Science au plus petit nombre de Principes possible, que d'avoir établi sur ces trois Principes toutes les lois du Mouvement des Corps dans des circonstances quelconques, comme j'ai tâché de le faire dans ce Traité.

A l'égard des démonstrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai suivi pour leur donner toute la clarté et la simplicité dont elles m'ont paru susceptibles, a été de les déduire toujours de la considération seule du Mouvement, envisagé de la manière la plus simple et la plus claire. Tout

ce que nous voyons bien distinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'est qu'il parcourt un certain espace, et qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'est donc de cette seule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une manière nette et précise ; ainsi on ne sera point surpris qu'en conséquence de cette réflexion, j'aie, pour ainsi dire, détourné la vue de dessus les *causes motrices*, pour n'envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent ; que j'aie entiérement proscrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs et métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

C'est par cette raison que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuse question des *forces vives*. Cette question qui depuis trente ans partage les Géomètres, consiste à savoir, si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vîtesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vîtesse : par exemple, si un Corps double d'un autre, et qui a trois fois autant de vîtesse, a dix-huit fois autant de force ou six fois autant seulement. Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage ;

que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir passer entiérement sous silence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir se faire honneur comme d'une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis si savamment et si heureusement approfondie (*) ; que *Mac-Laurin* a fait tous ses efforts pour renverser ; et à laquelle enfin les écrits d'un grand nombre de Mathématiciens illustres ont contribué à intéresser le Public. Ainsi, sans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit sur cette question, il ne sera pas hors de propos d'exposer ici très-succinctement les Principes qui peuvent servir à la résoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mouvement, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre par-là en général, que la propriété qu'ont les Corps qui se meuvent, de vaincre les obstacles qu'ils rencontrent, ou de leur résister. Ce n'est donc ni par l'espace qu'un Corps parcourt uniformément, ni par le tems qu'il employe à le parcourir, ni enfin par la considération simple, unique et abs-

(*) Voyez le Discours sur les lois de la communication du Mouvement, qui a mérité l'éloge de l'Académie en l'année 1726, où le *P. Mazière* remporta le prix. La raison pour laquelle la pièce de M. *Bernoulli* ne fut point couronnée, se trouve dans l'éloge que j'ai publié de ce grand Géomètre, quelques mois après sa mort, arrivée au commencement de 1748.

traite

traite de sa masse et de sa vîtesse qu'on doit estimer immédiatement la force ; c'est uniquement par les obstacles qu'un Corps rencontre, et par la résistance que lui font ces obstacles. Plus l'obstacle qu'un Corps peut vaincre, ou auquel il peut résister, est considérable, plus on peut dire que sa *force* est grande, pourvu que sans vouloir représenter par ce mot un prétendu être qui réside dans le Corps, on ne s'en serve que comme d'une manière abrégée d'exprimer un fait, à peu près comme on dit qu'un Corps a deux fois autant de *vîtesse* qu'un autre, au lieu de dire qu'il parcourt en tems égal deux fois autant d'espace, sans prétendre pour cela que ce mot de *vîtesse* représente un être inhérent au corps.

Ceci bien entendu, il est clair qu'on peut opposer au Mouvement d'un Corps trois sortes d'obstacles ; ou des obstacles invincibles qui anéantissent tout-à-fait son Mouvement, quel qu'il puisse être ; ou des obstacles qui n'ayent précisément que la résistance nécessaire pour anéantir le Mouvement du Corps, et qui l'anéantissent dans un instant, c'est le cas de l'équilibre ; ou enfin des obstacles qui anéantissent le Mouvement peu à peu, c'est le cas du Mouvement retardé. Comme les obstacles insurmontables anéantissent également toutes sortes de Mouvemens, ils ne peuvent servir à faire connoître la force : ce n'est donc que dans

l'équilibre, ou dans le Mouvement retardé qu'on doit en chercher la mesure. Or tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux Corps, quand les produits de leurs masses par leurs vîtesses virtuelles, c'est-à-dire, par les vîtesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir, sont égaux de part et d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vîtesse, ou, ce qui est la même chose, la quantité de Mouvement, peut représenter la force. Tout le monde convient aussi que dans le Mouvement retardé, le nombre des obstacles vaincus est comme le quarré de la vîtesse; ensorte qu'un Corps qui a fermé un ressort, par exemple, avec une certaine vîtesse, pourra avec une vîtesse double fermer, ou tout à la fois, ou successivement, non pas deux, mais quatre ressorts semblables au premier, neuf avec une vîtesse triple, et ainsi du reste. D'où les partisans des forces vives concluent que la force des Corps qui se meuvent actuellement, est en général comme le produit de la masse par le quarré de la vîtesse. Au fond, quel inconvénient pourroit-il y avoir à ce que la mesure des forces fût différente dans l'équilibre et dans le Mouvement retardé, puisque, si on veut ne raisonner que d'après des idées claires, on doit n'entendre par le mot de *force*, que l'effet produit en surmontant l'obstacle ou en lui résistant? Il faut avouer cependant que l'opinion de ceux qui regar-

dent la force comme le produit de la masse par la vîtesse, peut avoir lieu non-seulement dans le cas de l'équilibre, mais aussi dans celui du Mouvement retardé, si dans ce dernier cas on mesure la force, non par la quantité absolue des obstacles, mais par la somme des résistances de ces mêmes obstacles. Car on ne sauroit douter que cette somme de résistances ne soit proportionnelle à la quantité de Mouvement, puisque, de l'aveu de tout le monde, la quantité de Mouvement que le Corps perd à chaque instant, est proportionnelle au produit de la résistance par la durée infiniment petite de l'instant, et que la somme de ces produits est évidemment la résistance totale. Toute la difficulté se réduit donc à savoir si on doit mesurer la force par la quantité absolue des obstacles, ou par la somme de leurs résistances. Il paroîtroit plus naturel de mesurer la force de cette dernière manière; car un obstacle n'est tel qu'entant qu'il résiste, et c'est, à proprement parler, la somme des résistances qui est l'obstacle vaincu : d'ailleurs, en estimant ainsi la force, on a l'avantage d'avoir pour l'équilibre et pour le Mouvement retardé une mesure commune : néanmoins comme nous n'avons d'idée précise et distincte du mot de *force*, qu'en restreignant ce terme à exprimer un effet, je crois qu'on doit laisser chacun le maître de se décider comme il voudra

là-dessus ; et toute la question ne peut plus consister, que dans une discussion Métaphysique très-futile, ou dans une dispute de mots plus indigne encore d'occuper des Philosophes.

Tout ce que nous venons de dire suffit assez pour le faire sentir à nos Lecteurs. Mais une réflexion bien naturelle achevera de les en convaincre. Soit qu'un Corps ait une simple tendance à se mouvoir avec une certaine vîtesse, tendance arrêtée par quelque obstacle ; soit qu'il se meuve réellement et uniformément avec cette vîtesse ; soit enfin qu'il commence à se mouvoir avec cette même vîtesse, laquelle se consume et s'anéantisse peu à peu par quelque cause que ce puisse être ; dans tous ces cas, l'effet produit par le Corps est différent, mais le Corps considéré en lui-même n'a rien de plus dans un cas que dans un autre ; seulement l'action de la cause qui produit l'effet est différemment appliquée. Dans le premier cas, l'effet se réduit à une simple tendance, qui n'a point proprement de mesure précise, puisqu'il n'en résulte aucun mouvement ; dans le second, l'effet est l'espace parcouru uniformément dans un tems donné, et cet effet est proportionnel à la vîtesse ; dans le troisième, l'effet est l'espace parcouru jusqu'à l'extinction totale du Mouvement, et cet effet est comme le quarré de la vîtesse. Or ces différens effets sont évidemment produits par une

même cause ; donc ceux qui ont dit que la force étoit tantôt comme la vîtesse, tantôt comme son quarré, n'ont pu entendre parler que de l'effet, quand ils se sont exprimés de la sorte. Cette diversité d'effets provenans tous d'une même cause, peut servir, pour le dire en passant, à faire voir le peu de justesse et de précision de l'axiome prétendu, si souvent mis en usage, sur la proportionalité des causes à leurs effets.

Enfin ceux mêmes qui ne seroient pas en état de remonter jusqu'aux principes métaphysiques de la question des forces vives, verront aisément qu'elle n'est qu'une dispute de mots, s'ils considèrent que les deux partis sont d'ailleurs entiérement d'accord sur les principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Qu'on propose le même Problême de Méchanique à résoudre à deux Géomètres, dont l'un soit adversaire et l'autre partisan des forces vives, leurs solutions, si elles sont bonnes, seront toujours parfaitement d'accord ; la question de la mesure des forces est donc entiérement inutile à la Méchanique, et même sans aucun objet réel. Aussi n'auroit-elle pas sans doute enfanté tant de volumes, si on se fût attaché à distinguer ce qu'elle renfermoit de clair et d'obscur. En s'y prenant ainsi, on n'auroit eu besoin que de quelques lignes pour décider la question : mais il semble que la plupart de ceux qui

ont traité cette matière, aient craint de la traiter en peu de mots.

La réduction que nous avons faite de toutes les lois de la Méchanique à trois, celle de la force d'inertie, celle du mouvement composé, et celle de l'équilibre, peut servir à résoudre le grand Problême métaphysique proposé depuis peu par une des plus célèbres Académies de l'Europe, *si les lois de la Statique et de la Méchanique sont de vérité nécessaire ou contingente ?* Pour fixer nos idées sur cette question, il faut d'abord la réduire au seul sens raisonnable qu'elle puisse avoir. Il ne s'agit pas de décider si l'Auteur de la nature auroit pu lui donner d'autres lois que celles que nous y observons; dès qu'on admet un être intelligent capable d'agir sur la matière, il est évident que cet être peut à chaque instant la mouvoir et l'arrêter à son gré, ou suivant des lois uniformes, ou suivant des lois qui soient différentes pour chaque instant et pour chaque partie de matière; l'expérience continuelle des mouvemens de notre corps, nous prouve assez que la matière, soumise à la volonté d'un principe pensant, peut s'écarter dans ses mouvemens de ceux qu'elle auroit véritablement si elle étoit abandonnée à elle-même. La question proposée se réduit donc à savoir si les lois de l'équilibre et du mouvement qu'on observe dans la nature, sont différentes de celles que la

matière abandonnée à elle-même auroit suivies ; développons cette idée. Il est de la dernière évidence qu'en se bornant à supposer l'existence de la matière et du mouvement, il doit nécessairement résulter de cette double existence certains effets ; qu'un Corps mis en mouvement par quelque cause, doit ou s'arrêter au bout de quelque tems, ou continuer toujours à se mouvoir ; qu'un corps qui tend à se mouvoir à la fois suivant les deux côtés d'un parallélogramme, doit nécessairement décrire, ou la diagonale, ou quelqu'autre ligne ; que quand plusieurs Corps en mouvement se rencontrent et se choquent, il doit nécessairement arriver en conséquence de leur impénétrabilité mutuelle quelque changement dans l'état de tous ces Corps, ou au moins dans l'état de quelques-uns d'entr'eux. Or des différens effets possibles, soit dans le mouvement d'un Corps isolé, soit dans celui de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, il en est un qui dans chaque cas doit infailliblement avoir lieu en conséquence de l'existence seule de la matière, et abstraction faite de tout autre principe différent, qui pourroit modifier cet effet ou l'altérer. Voici donc la route qu'un Philosophe doit suivre pour résoudre la question dont il s'agit. Il doit tâcher d'abord de découvrir par le raisonnement quelles seroient les lois de la Statique et de la Méchanique dans la

matière abandonnée à elle-même; il doit examiner ensuite par l'expérience quelles sont ces lois dans l'univers; si les unes et les autres sont différentes, il en conclura que les lois de la Statique et de la Méchanique, telle que l'expérience les donne, sont de vérité contingente, puisqu'elles seront la suite d'une volonté particulière et expresse de l'être suprême; si au contraire les lois données par l'expérience s'accordent avec celles que le raisonnement seul a fait trouver, il en conclura que les lois observées sont de vérité nécessaire; non pas en ce sens que le Créateur n'eût pu établir des lois toutes différentes, mais en ce sens qu'il n'a pas jugé à propos d'en établir d'autres que celles qui résultoient de l'existence même de la matière.

Or nous croyons avoir démontré dans cet Ouvrage, qu'un Corps abandonné à lui-même doit persister éternellement dans son état de repos ou de mouvement uniforme; nous croyons avoir démontré de même que s'il tend à se mouvoir à la fois suivant les deux côtés d'un parallélogramme quelconque, la diagonale est la direction qu'il doit prendre de lui-même, et pour ainsi dire, choisir entre toutes les autres. Nous avons démontré enfin que toutes les lois de la communication du mouvement entre les Corps se réduisent aux lois de l'équilibre, et que les lois de l'équilibre se réduisent elles-mêmes à celles de l'équilibre de deux

deux Corps égaux, animés en sens contraires de vîtesses virtuelles égales. Dans ce dernier cas les mouvemens des deux Corps se détruiront évidemment l'un l'autre, et par une conséquence géométrique il y aura encore nécessairement équilibre, lorsque les masses seront en raison inverse des vîtesses; il ne reste plus qu'à savoir si le cas de l'équilibre est unique, c'est-à-dire, si quand les masses ne seront pas en raison inverse des vîtesses, un des Corps devra nécessairement obliger l'autre à se mouvoir. Or il est aisé de sentir que dès qu'il y a un cas possible et nécessaire d'équilibre, il ne sauroit y en avoir d'autres : sans cela les lois du choc des Corps, qui se réduisent nécessairement à celles de l'équilibre, deviendroient indéterminées; ce qui ne sauroit être, puisqu'un Corps venant en choquer un autre, il doit nécessairement en résulter un effet unique, suite indispensable de l'existence et de l'impénétrabilité de ces Corps. On peut d'ailleurs démontrer l'unité de la loi d'équilibre par un autre raisonnement, trop mathématique pour être développé dans ce Discours, mais que j'ai tâché de rendre sensible dans mon Ouvrage, et auquel je renvoye le Lecteur (*).

(*) Voyez l'article 46 à la fin du troisième cas, et l'article 47. On trouve aussi d'excellentes réflexions sur la même matière dans le *Mémoire de l'Académie des Sciences* de 1769, page 288 et suiv.

De toutes ces réflexions, il s'ensuit que les lois de la Statique et de la Méchanique, exposées dans ce Livre, sont celles qui résultent de l'existence de la matière et du mouvement. Or l'expérience nous prouve que ces lois s'observent en effet dans les Corps qui nous environnent. Donc les lois de l'équilibre et du mouvement, telles que l'observation nous les fait connoître, sont de vérité nécessaire. Un Métaphysicien se contenteroit peut-être de le prouver, en disant qu'il étoit de la sagesse du Créateur et de la simplicité de ses vues, de ne point établir d'autres lois de l'équilibre et du mouvement, que celles qui résultent de l'existence même des Corps, et de leur impénétrabilité mutuelle; mais nous avons cru devoir nous abstenir de cette manière de raisonner, parce qu'il nous a paru qu'elle porteroit sur un principe trop vague; la nature de l'être suprême nous est trop cachée pour que nous puissions connoître directement ce qui est ou n'est pas conforme aux vues de sa sagesse; nous pouvons seulement entrevoir les effets de cette sagesse dans l'observation des lois de la nature, lorsque le raisonnement mathématique nous aura fait voir la simplicité de ces lois, et que l'expérience nous en aura montré les applications et l'étendue.

Cette réflexion peut servir, ce me semble, à nous faire apprécier les démonstrations, que plu-

sieurs Philosophes ont données des lois du mouvement d'après le principe des causes finales, c'est-à-dire, d'après les vues que l'Auteur de la nature a dû se proposer en établissant ces lois. De pareilles démonstrations ne peuvent avoir de force qu'autant qu'elles sont précédées et appuyées par des démonstrations directes et tirées de principes qui soient plus à notre portée; autrement il arriveroit souvent qu'elles nous induiroient en erreur. C'est pour avoir suivi cette route, pour avoir cru qu'il étoit de la sagesse du Créateur de conserver toujours la même quantité de mouvement dans l'univers, que Descartes s'est trompé sur les lois de la percussion. Ceux qui l'imiteroient courroient risque ou de se tromper comme lui, ou de donner pour un principe général ce qui n'auroit lieu que dans certains cas, ou enfin de regarder comme une loi primitive de la nature, ce qui ne seroit qu'une conséquence purement mathématique de quelques formules.

Après avoir donné au Lecteur une idée générale de l'objet que je me suis proposé dans cet Ouvrage, il ne me reste plus qu'un mot à dire sur la forme que j'ai cru devoir lui donner. J'ai tâché dans ma première Partie de mettre, le plus qu'il m'a été possible, les Principes de la Méchanique à la portée des commençans; je n'ai pu me dispenser d'employer le calcul différentiel dans la

théorie des mouvemens variés ; c'est la nature du sujet qui m'y a contraint. Au reste, j'ai fait ensorte de renfermer dans cette première Partie un assez grand nombre de choses dans un fort petit espace, et si je ne suis point entré dans tout le détail que la matière pouvoit comporter, c'est qu'uniquement attentif à l'exposition et au développement des principes essentiels de la Méchanique, et ayant pour but de réduire cet Ouvrage à ce qu'il peut contenir de nouveau en ce genre, je n'ai pas cru devoir le grossir d'une infinité de propositions particulières que l'on trouvera aisément ailleurs.

La seconde Partie, dans laquelle je me suis proposé de traiter des lois du mouvement des Corps entr'eux, fait la portion la plus considérable de l'Ouvrage : c'est la raison qui m'a engagé à donner à ce Livre le nom de *Traité de Dynamique*. Ce nom qui signifie proprement la Science des puissances ou causes motrices, pourroit paroître d'abord ne pas convenir à ce Livre, dans lequel j'envisage plutôt la Méchanique comme la Science des effets, que comme celle des causes : néanmoins comme le mot de *Dynamique* est fort usité aujourd'hui parmi les Savans, pour signifier la Science du mouvement des Corps, qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, j'ai cru devoir le conserver, pour annoncer aux Géomètres

par le titre même de ce Traité, que je m'y propose principalement pour but de perfectionner et d'augmenter cette partie de la Méchanique. Comme elle n'est pas moins curieuse qu'elle est difficile, et que les Problêmes qui s'y rapportent composent une classe très-étendue, les plus grands Géomètres s'y sont appliqués particuliérement depuis quelques années : mais ils n'ont résolu jusqu'à présent qu'un très-petit nombre de Problêmes de ce genre, et seulement dans des cas particuliers : la plupart des solutions qu'ils nous ont données sont appuyées outre cela sur des principes que personne n'a encore démontrés d'une manière générale ; tels, par exemple, que celui de la conservation des forces vives. J'ai donc cru devoir m'étendre principalement sur ce sujet, et faire voir comment on peut résoudre toutes les questions de Dynamique par une même Méthode fort simple et fort directe, et qui ne consiste que dans la combinaison dont j'ai parlé plus haut, des principes de l'équilibre et du mouvement composé. J'en montre l'usage dans un petit nombre de Problêmes choisis, dont quelques-uns sont déja connus, d'autres sont entiérement nouveaux, d'autres enfin ont été mal résolus, même par les plus savans Mathématiciens.

L'élégance dans la solution d'un Problême, consistant surtout à n'y employer que des principes

directs et en très-petit nombre, on ne sera pas surpris que l'uniformité qui règne dans toutes mes solutions, et que j'ai eue principalement en vue, les rende quelquefois un peu plus longues, que si je les avois déduites de principes moins directs. La démonstration que j'aurois été obligé de faire de ces principes, ne pouvoit d'ailleurs que m'écarter de la briéveté que j'aurois cherché à me procurer par leur moyen; et la portion la plus considérable de mon Livre, n'auroit plus été qu'un amas informe de Problêmes peu digne de voir le jour, malgré la variété que j'ai tâché d'y répandre, et les difficultés qui sont particulières à chacun d'eux.

Au reste, comme cette seconde Partie est destinée principalement à ceux, qui déja instruits du calcul différentiel en intégral, se seront rendus familiers les principes établis dans la première, ou seront déja exercés à la solution des Problêmes connus et ordinaires de la Méchanique; je dois avertir que pour éviter les circonlocutions, je me suis souvent servi du terme obscur de *force*, et de quelques autres qu'on emploie communément quand on traite du mouvement des Corps; mais je n'ai jamais prétendu attacher à ces termes d'autres idées que celles qui résultent des principes que j'ai établis, soit dans ce Discours, soit dans la première Partie de ce Traité.

Enfin, du même principe qui me conduit à la solution de tous les Problêmes de Dynamique, je déduis aussi plusieurs propriétés du centre de gravité, dont les unes sont entiérement nouvelles, les autres n'ont été prouvées jusqu'à présent que d'une manière vague et obscure, et je termine l'Ouvrage par une démonstration du principe appelé communément *la conservation des forces vives.*

L'accueil que le Public a fait à ce premier essai, lorsqu'il parût en 1743, m'a engagé à publier en 1744 un autre Ouvrage, dans lequel ce qui concerne le mouvement et l'équilibre des fluides a été traité suivant la même Méthode, et par le même principe. Cette matière épineuse et délicate n'est pas la seule à laquelle j'aie appliqué ce principe; j'en ai fait le plus grand usage dans mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, Problême dont j'ai donné le premier la solution, long-tems et inutilement cherchée par de très-grands Géomètres; dans mon *Essai sur la résistance des fluides*, fondé sur une théorie entiérement nouvelle; dans mes *Réflexions sur la cause des vents*, pour calculer les oscillations que l'action du Soleil et de la Lune doivent produire dans notre Atmosphère, et que personne n'avoit encore entrepris de déterminer; enfin j'ose dire que plus j'ai eu d'occasions d'employer les Méthodes

exposées et développées dans cet Ouvrage, plus j'ai reconnu la simplicité, la généralité et la fécondité de ces Méthodes.

TABLE

TABLE

DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

AVERTISSEMENT.
DISCOURS PRÉLIMINAIRE. Pag. j
Définitions et Notions préliminaires. 1

PREMIÈRE PARTIE.

Loix générales du mouvement et de l'équilibre des Corps.

CHAPITRE I. *DE la force d'inertie, et des propriétés du Mouvement qui en résultent.* Pag. 3
Du Mouvement uniforme..... 9
REMARQUE sur la mesure du tems..... 11
Du Mouvement accéléré ou retardé..... 16

Remarques sur les forces accélératrices, et sur la comparaison de ces forces entr'elles 22
Chap. II. *Du Mouvement composé* 35
Du Mouvement en ligne courbe, et des forces centrales 40
Chap. III. *Du Mouvement détruit ou changé par des obstacles* 44
Du Mouvement d'un Corps le long d'une surface courbe 47
De l'Equilibre 50

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, avec plusieurs applications de ce principe.

Chapitre I. *Exposition du Principe.* 72
Chap. II. *Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps, déduites du Principe précédent* 75

CHAP. III. *Problêmes où l'on montre l'usage du Principe précédent* 96
§. I. *Des Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges* ..... ibid.
§. II. *Des Corps qui vacillent sur des plans* 186
§. III. *Des Corps qui agissent les uns sur les autres par des fils, le long desquels ils peuvent couler librement* 200
§. IV. *Des Corps qui se poussent ou qui se choquent* 211
D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois 227
Du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois 235
CHAP. IV. *Du Principe de la conservation des forces vives* 252
De la conservation des forces vives dans les Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles 254
De la conservation des forces vives quand les Corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils 259
De la conservation des forces vives quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles, et qu'on les regarde comme des points 261
De la conservation des forces vives quand les Corps sont de masses finies, et qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles. 262

De la conservation des forces vives dans le choc des Corps élastiques 264
De la conservation des forces vives dans les fluides 269

Fin de la Table des Titres.

TRAITÉ DE DYNAMIQUE.

Définitions et Notions préliminaires.

I.

Si deux portions d'étendue semblables et égales entr'elles sont *impénétrables*, c'est-à-dire, si elles ne peuvent être imaginées unies et confondues l'une avec l'autre, de manière qu'elles ne fassent qu'une même portion d'étendue moindre que la somme des deux, chacune de ces portions d'étendue sera ce qu'on appelle un *Corps*. L'impénétrabilité est la propriété principale par laquelle nous distinguons les corps des parties de l'espace indéfini, où nous imaginons qu'ils sont placés.

Le *lieu* d'un corps est la partie de l'espace qu'il occupe, c'est-à-dire, la partie de l'espace avec laquelle l'étendue du corps est coïncidente.

II.

Un corps est en repos quand il reste dans un même lieu ; il est en mouvement quand il passe d'un lieu dans un autre, c'est-à-dire, quand il occupe successivement et sans interruption des parties de l'espace immédiatement contiguës les unes aux autres.

III.

Comme un corps ne peut occuper plusieurs lieux à la fois, il ne peut arriver d'un lieu à un autre dans le même instant: le mouvement ne peut donc se faire que durant un certain *tems*.

IV.

L'espace parcouru par un corps qui se meut est divisible à l'infini ; le tems est donc aussi divisible à l'infini. On conçoit de plus, que si un corps se meut en ligne droite, sans subir à chaque instant d'autre changement que le changement de place, il ne peut manquer de parcourir des espaces égaux en tems égaux. Dans ce cas, on dit que le corps se meut *uniformément*. Si les espaces parcourus en tems égaux sont croissans ou décroissans, le mouvement est dit *accéléré* ou *retardé*.

PREMIÈRE PARTIE.

Loix générales du mouvement et de l'équilibre des Corps.

1. On peut réduire tous les principes de la Mécanique à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, et l'équilibre. Au moins j'espère faire voir par ce Traité, que toute cette science peut être déduite de ces trois principes. Je traiterai de chacun en particulier dans chacun des chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

De la force d'inertie, et des propriétés du mouvement qui en résultent.

2. J'APPELLE avec M. Newton *force d'inertie*, la propriété qu'ont les corps de rester dans l'état où ils sont: c'est cette propriété qu'il faut démontrer ici. Or un corps est nécessairement dans l'état de repos ou dans celui de mouvement; il faut donc démontrer les deux lois suivantes.

I. Loi.

3. Un corps en repos y persistera, à moins qu'une

cause étrangère ne l'en tire. Car un corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plutôt que d'un autre.

COROLLAIRE.

4. De là il s'ensuit, que si un corps reçoit du mouvement par quelque cause que ce puisse être, il ne pourra de lui-même accélérer ni retarder ce mouvement.

5. On appelle en général *puissance* ou *cause motrice*, tout ce qui oblige un corps à se mouvoir.

II. LOI.

6. Un corps mis une fois en mouvement par une cause quelconque, doit y persister toujours uniformément et en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas sur lui ; c'est-à-dire, qu'à moins qu'une cause étrangère et différente de la cause motrice n'agisse sur ce corps, il se mouvra perpétuellement en ligne droite, et parcourra en tems égaux des espaces égaux.

Car, ou l'action indivisible et instantanée de la cause motrice au commencement du mouvement, suffit pour faire parcourir au corps un certain espace, ou le corps a besoin pour se mouvoir de l'action continuée de la cause motrice.

Dans le premier cas, il est visible que l'espace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite uniformément

par le corps mû. Car (*hyp.*) passé le premier instant, l'action de la cause motrice n'existe plus, et le mouvement néanmoins subsiste encore : il sera donc nécessairement uniforme, puisque (*Art.* 4) un corps ne peut accélérer ni retarder son mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raison pour que le corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche. Donc dans ce premier cas, où l'on suppose qu'il soit capable de se mouvoir de lui-même pendant un certain tems, indépendamment de la cause motrice, il se mouvra de lui-même pendant ce tems uniformément et en ligne droite.

Or un corps qui peut se mouvoir de lui-même uniformément et en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à se mouvoir de la même manière, si rien ne l'en empêche. Car supposons le corps partant de A, (Fig. 1re) et capable de parcourir de lui-même uniformément la ligne AB; soient pris sur la ligne AB deux points quelconques C, D, entre A et B. Le corps étant en D est précisément dans le même état que lorsqu'il est en C, si ce n'est qu'il se trouve dans un autre lieu. Donc il doit arriver à ce corps la même chose que quand il est en C. Or étant en C il peut (*hyp.*) se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'en B. Donc étant en D il pourra se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'au point G, tel que $DG = CB$, et ainsi de suite.

Donc si l'action première et instantanée de la cause motrice est capable de mouvoir le corps, il sera mû

uniformément et en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause ne l'en empêchera pas.

Dans le second cas, puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangère et différente de la cause motrice n'agit sur le corps, rien ne détermine donc la cause motrice à augmenter ni à diminuer; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme et constante, et qu'ainsi pendant le tems qu'elle agira, le corps se mouvra en ligne droite et uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment et uniformément pendant un certain tems, subsistant toujours tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, et produire constamment le même effet. Donc, etc.

Donc en général un corps mis en mouvement par quelque cause que ce soit, y persistera toujours uniformément et en ligne droite, tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui.

La ligne droite qu'un corps décrit ou tend à décrire, est nommée *sa direction*.

REMARQUE PREMIÈRE.

7. Je me suis un peu étendu sur la preuve de la seconde loi, parce qu'il y a eu et qu'il y a peut-être encore quelques philosophes qui prétendent que le mouvement d'un corps doit de lui-même se ralentir peu à peu, comme il semble que l'expérience le prouve. Il faut convenir au reste que toutes les preuves qu'on a données

jusqu'ici de la conservation du mouvement, n'ont point le degré d'évidence nécessaire pour convaincre l'esprit; elles sont presque toutes fondées, ou sur une force qu'on imagine dans la matière, par laquelle elle résiste à tout changement d'état, ou sur l'indifférence de la matière au mouvement comme au repos. Le premier de ces deux principes, outre qu'il suppose dans la matière un être dont on n'a point d'idée nette, ne peut suffire pour prouver la loi dont il est question. Car quand un corps se meut, même uniformément, le mouvement qu'il a dans un instant quelconque, est distingué et comme isolé du mouvement qu'il a eu ou qu'il aura dans les instans précédens ou suivans. Le corps est donc en quelque manière à chaque instant dans un nouvel état, dans un état qui n'a rien de commun avec le précédent; il ne fait, pour ainsi dire, continuellement que commencer à se mouvoir, et on pourroit croire qu'il tendroit sans cesse à retomber dans le repos, si la même cause qui l'en a tiré d'abord, ne continuoit en quelque sorte à l'en tirer toujours.

A l'égard de l'indifférence de la matière au mouvement ou au repos, tout ce que ce principe présente, ce me semble, de bien distinct à l'esprit, c'est qu'il n'est pas essentiel à la matière de se mouvoir toujours, ni d'être toujours en repos; mais s'ensuit-il clairement de là qu'un corps en mouvement ne puisse tendre continuellement au repos? Ce n'est pas que le repos lui soit plus essentiel que le mouvement; mais on pourroit penser

qu'il ne faut autre chose à un corps pour être en repos, que d'être un corps, au lieu que pour le mouvement il a peut-être besoin de quelque chose de plus, qui doit être, pour ainsi dire, continuellement reproduit en lui; à peu près comme nous l'éprouvons dans le mouvement de notre corps, qui pour se mouvoir a besoin d'un effort continuel, lequel se consume et renaît à chaque instant. Nous ne prétendons pas donner pour juste le parallèle des corps animés aux corps inanimés; mais ce parallèle peut au moins faire croire confusément, quoique sans raison, qu'il y a quelque chose dans un corps en mouvement qui n'est pas dans un corps en repos, et suffit par conséquent pour rendre insuffisante la preuve que nous examinons ici.

La démonstration donnée ci-dessus de la conservation du mouvement, a cela de particulier, qu'elle a lieu également, soit que la cause motrice doive toujours être appliquée au corps, ou non. Ce n'est pas que je croie l'action continuée de cette cause, nécessaire pour mouvoir le corps; car si l'action instantanée ne suffisoit pas, quel seroit alors l'effet de cette action? Et si l'action instantanée n'avoit point d'effet, comment l'action continuée en auroit-elle? Mais comme on doit employer à la solution d'une question le moins de principes qu'il est possible, j'ai cru devoir me borner à démontrer que la continuation du mouvement a lieu également dans les deux hypothèses; il est vrai que notre démonstration suppose l'existence du mouvement, et à plus forte raison sa possibilité;

sibilité; mais nier que le mouvement existe, c'est se refuser à un fait que personne ne révoque en doute.

Remarque seconde.

8. L'expérience est d'accord avec le raisonnement pour prouver le principe de la *force d'inertie*. 1°. Nous voyons *que les corps qui nous environnent restent en repos, tant que rien ne les en tire;* et s'il arrive quelquefois qu'ils paroissent se mouvoir sans que nous en voyons la cause, nous avons lieu de juger par l'analogie, par l'uniformité des loix de la nature, et par l'incapacité de la matière à se mouvoir d'elle-même, que cette cause n'en est pas moins réelle pour nous être cachée. 2°. Quoiqu'il n'y ait point de corps qui conserve éternellement son mouvement, puisqu'il y a toujours des causes qui le ralentissent peu-à-peu, comme le frottement et la résistance de l'air, cependant nous voyons qu'un corps en mouvement y persiste d'autant plus long-tems que les causes qui retardent ce mouvement sont moindres; d'où nous pouvons conclure que le *mouvement ne finiroit point, si les causes retardatrices étoient nulles* (*).

Du mouvement uniforme.

9. Nous venons de voir qu'un corps se meut unifor-

(*) On trouvera dans l'Encyclopédie, au mot FORCE, plusieurs autres réflexions sur le principe de la force d'inertie; comme elles n'appartiennent pas immédiatement à notre sujet, nous y renvoyons le lecteur.

mément et en ligne droite, quand aucune cause étrangère n'agit sur lui. D'où il s'ensuit que le même corps peut encore se mouvoir uniformément, lorsque deux causes étrangères agissent en même-temps et également, l'une pour accélérer, l'autre pour retarder son mouvement. (C'est ainsi, pour le dire en passant, que les corps qui tombent parviennent à se mouvoir uniformément, lorsque la résistance du fluide où ils se meuvent tend à diminuer leur mouvement, autant que leur pesanteur tend à l'augmenter). Dans tout autre cas, le mouvement est nécessairement accéléré ou retardé.

10. Si deux parties quelconques AB, AC (Fig. 2) d'une ligne indéfinie AO, représentent deux portions du tems écoulé depuis le commencement du mouvement, et les lignes BD, CE, les espaces parcourus durant ces tems par un corps dont le mouvement est uniforme, les points D, E, seront à une ligne droite ADE.

Car, puisqu'un corps qui se meut uniformément parcourt des espaces égaux en tems égaux, les points D, E, doivent être à une ligne telle, que si on prend AB, BC égales entr'elles et quelconques, on ait toujours $BD=FE$. Or cette propriété n'appartient qu'à la ligne droite. Donc, etc.

COROLLAIRE.

11. $BD : CE :: AB : AC$. C'est-à-dire que dans le mouvement uniforme, les espaces sont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.

Remarque sur la mesure du tems.

12. Comme le rapport des parties du tems nous est inconnu en lui-même, l'unique moyen que nous puissions employer pour découvrir ce rapport, c'est d'en chercher quelqu'autre plus sensible et mieux connu, auquel nous puissions le comparer; on aura donc trouvé la mesure du tems la plus simple, si on vient à bout de comparer de la manière la plus simple qu'il soit possible, le rapport des parties du tems, avec celui de tous les rapports que l'on connoît le mieux. De là il résulte que le mouvement uniforme est la mesure du tems la plus simple. Car, d'un côté, le rapport des parties d'une ligne droite est celui que nous saisissons le plus facilement; et de l'autre, il n'y a point de rapports plus aisés à comparer entr'eux, que des rapports égaux. Or dans le mouvement uniforme, le rapport des parties du tems est égal à celui des parties correspondantes de la ligne parcourue. Le mouvement uniforme nous donne donc tout à la fois le moyen, et de comparer le rapport des parties du tems au rapport qui nous est le plus sensible, et de faire cette comparaison de la manière la plus simple; nous trouvons donc dans le mouvement uniforme, la mesure la plus simple du tems.

Je dis outre cela, que la mesure du tems par le mouvement uniforme, est, indépendamment de sa simplicité, celle dont il est le plus naturel de penser à se servir. En effet, comme il n'y a point de rapport que nous con-

noissions plus exactement que celui des parties de l'espace, et qu'en général un mouvement quelconque dont la loi seroit donnée, nous conduiroit à découvrir le rapport des parties du tems, par l'analogie connue de ce rapport avec celui des parties de l'espace parcouru; il est clair qu'un tel mouvement seroit la mesure du tems la plus exacte, et par conséquent celle qu'on devroit mettre en usage préférablement à toute autre. Donc, s'il y a quelque espèce particulière du mouvement, où l'analogie entre le rapport des parties du tems et celui des parties de l'espace parcouru, soit connue indépendamment de toute hypothèse, et par la nature du mouvement même, et que cette espèce particulière de mouvement soit la seule à qui cette propriété appartienne, elle sera nécessairement la mesure du tems la plus naturelle. Or il n'y a que le mouvement uniforme qui réunisse les deux conditions dont nous venons de parler. Car (*art.* 6) le mouvement d'un corps est uniforme par lui-même: il ne devient accéléré ou retardé qu'en vertu d'une cause étrangère, et alors il est susceptible d'une infinité de loix différentes de variation. La loi d'uniformité, c'est-à-dire l'égalité entre le rapport des tems et celui des espaces parcourus, est donc une propriété du mouvement considéré en lui-même. Le mouvement uniforme n'en est par-là que plus analogue à la durée, et par conséquent plus propre à en être la mesure, puisque les parties de la durée se succèdent aussi constamment et uniformément. Au contraire, toute loi d'accélération ou de diminution

dans le mouvement, est arbitraire, pour ainsi dire, et dépendante de circonstances extérieures. Le mouvement non uniforme ne peut être par conséquent la mesure naturelle du tems; car, en premier lieu, il n'y auroit pas de raison pourquoi une espèce particulière de mouvement non uniforme, fût la mesure première du tems plutôt qu'une autre: en second lieu, on ne pourroit mesurer le tems par un mouvement non uniforme, sans avoir découvert auparavant par quelque moyen particulier l'analogie entre le rapport des tems et celui des espaces parcourus, qui conviendroit au mouvement proposé. D'ailleurs, comment connoître cette analogie autrement que par l'expérience? et l'expérience ne supposeroit-elle pas qu'on eût déja une mesure du tems fixe et certaine?

Mais le moyen de s'assurer, dira-t-on, qu'un mouvement soit parfaitement uniforme? Je réponds d'abord, qu'il n'y a non plus aucun mouvement non uniforme dont nous sachions exactement la loi, et qu'ainsi cette difficulté prouve seulement que nous ne pouvons connoître exactement et en toute rigueur le rapport des parties du tems; mais il ne s'ensuit pas de là, que le mouvement uniforme n'en soit par sa nature seule, la première et la plus simple mesure. Aussi ne pouvant avoir de mesure du tems précise et rigoureuse, c'est dans les mouvemens à peu près uniformes que nous en cherchons la mesure au moins approchée. Nous avons trois moyens de juger qu'un mouvement est à peu près uniforme; 1°. Quand le corps

qui se meut et parcourt des espaces égaux, dans des tems que nous avons lieu de juger égaux ; et nous avons lieu de juger les tems égaux, quand nous avons observé par une expérience réitérée, qu'il se passe durant ces tems des effets semblables, que nous avons lieu de juger devoir durer également long-tems. Ainsi nous avons lieu de juger que les tems qu'une même clepsydre met à se vuider sont égaux. Si donc pendant ces tems un corps parcourt des espaces égaux, nous avons lieu de juger que son mouvement est uniforme. 2°. Quand nous avons lieu de croire que l'effet de la cause accélératrice ou retardatrice, s'il y en a une, ne peut être qu'insensible. C'est par la réunion de ces deux moyens qu'on a jugé que le mouvement de la terre autour de son axe est uniforme, et cette supposition non-seulement n'est point contredite par les autres phénomènes célestes, mais elle paroît même s'y accorder parfaitement. 3°. Quand nous comparons le mouvement dont il s'agit à d'autres mouvemens, et que nous observons la même loi dans les uns et les autres. Ainsi, si plusieurs corps se meuvent, de manière que les espaces qu'ils parcourent durant un même tems soient toujours entr'eux, ou exactement, ou à peu près dans le même rapport, on juge que le mouvement de ces corps est ou exactement, ou au moins à très-peu près uniforme. Car si un corps A qui se meut uniformément parcourt l'espace E durant le tems T pris à volonté, et qu'un autre corps B, se mouvant aussi uniformément, parcoure l'espace e pendant le même tems

T, le rapport des espaces E, e, sera toujours le même soit que les deux corps aient commencé à se mouvoir dans le même instant ou dans des instans différens ; et le mouvement uniforme est le seul qui ait cette propriété. C'est pourquoi si on divise le tems en parties quelconques égales ou inégales à volonté, et si on trouve que les espaces parcourus par deux corps durant une même partie de ce tems, sont toujours dans le même rapport, plus le nombre des parties du tems sera grand, plus on sera en droit de conclure que le mouvement de chaque corps est uniforme.

Aucun de ces trois moyens n'est exact dans la rigueur géométrique; mais ils suffisent, sur-tout quand ils sont répétés et réunis, pour tirer une conclusion valable, sinon sur l'uniformité absolue, au moins sur l'uniformité très-approchée.

13. Un corps qui se meut uniformément est dit se mouvoir d'autant plus *vîte*, que l'espace BD qu'il parcourt dans un même tems AB, est plus grand; de sorte que si BD, Bd, sont les espaces parcourus uniformément par deux corps dans le même tems AB, on dit que les *vîtesses* de ces deux corps sont entr'elles comme BD à Bd.

COROLLAIRE.

14. BD est à $Bd :: \frac{BD}{AB} : \frac{Bd}{AB} :: \frac{BD}{AB} : \frac{Ce}{AC}$.

Donc en général les vîtesses de deux corps sont entr'elles

comme les espaces BD, Ce qu'ils parcourent dans des tems quelconques, ces espaces étant divisés par les tems employés à les parcourir (1).

La vîtesse d'un corps mû uniformément, est donc en général comme l'espace divisé par le tems. La *vîtesse* ne renfermant qu'une idée relative, n'a point de mesure absolue, ou ne juge point de la vîtesse d'un autre corps. Ainsi cette manière de parler, si commune chez les Mécaniciens, que la *vîtesse est égale à l'espace divisé par le tems*, n'est qu'une expression abrégée pour dire que les vîtesses de deux corps qui se meuvent uniformément, sont entr'elles comme les espaces que ces corps parcourent, divisés par les tems qu'ils employent à les parcourir: expression qu'il faut entendre elle-même dans le sens expliqué par la note.

Du mouvement accéléré ou retardé.

15. Si les lignes BD, CE, (Fig. 3 et 4.) représen-

(1) L'espace et le tems étant des quantités de nature différente, ainsi qu'on l'a remarqué dans le discours préliminaire, on sent bien qu'on ne peut diviser l'espace par le tems. Ainsi, quand on dit que *les vîtesses sont comme les espaces divisés par les tems*, c'est une expression abrégée qui signifie que les vîtesses sont comme les rapports des espaces à une même commune mesure, divisés par les rapports des tems à une même commune mesure; c'est-à-dire que si on prend, par exemple, le pied pour la mesure des espaces, et la minute pour la mesure des tems, les vîtesses de deux corps qui se meuvent uniformément sont entr'elles comme les nombres de pieds parcourus divisés par les nombres de minutes employées à les parcourir, et non pas comme les pieds divisés par les minutes. *Voyez* l'Encyclopédie à la fin du mot ÉQUATION.

tant

tant les espaces parcourus pendant les tems AB, AC, ne sont pas à une ligne droite, mais à une courbe ADE, alors le mouvement n'est plus uniforme, mais il est accéléré ou retardé, selon que la courbe ADE est convexe ou concave vers AC; car si le mouvement est accéléré, par exemple, les espaces DX, PE (Fig. 5.) parcourus dans des tems égaux BQ, BC, sont croissans; ensorte que PE est $> DX$; ce qui ne sauroit être à moins que la courbe ADE ne soit convexe vers AC. Cette variation continuelle ne peut provenir (*art.* 6.) que de quelque cause étrangère qui agit sans cesse, pour accélérer ou retarder le mouvement.

La vîtesse du corps mû change alors à chaque instant, et ne peut avoir, comme dans le mouvement uniforme, une quantité constante pour mesure. On conçoit seulement que son expression pour un instant donné, doit être la même qu'elle seroit, si dans cet instant le mouvement cessoit d'être accéléré ou retardé. Supposons donc, par exemple, que le mouvement du corps soit accéléré, et qu'à l'instant même où le corps finit de parcourir la ligne BD, il vienne à se mouvoir uniformément avec la vîtesse qu'il a en D; il est clair, 1°. que les lignes TZ, PN (*Fig.* 5.) représentant les espaces qu'il décriroit alors dans des tems finis quelconques BM, BC, seroient terminés par une ligne droite DN; 2°. que ces lignes PN, TZ, doivent être plus grandes que les espaces DX, Dx, qu'il a parcourus précédemment dans des tems $Bm = BM$, et $BQ = BC$; 3°. que

ces mêmes espaces PN, TZ doivent être plus petits que les espaces PE, TG, qu'il auroit parcourus dans les tems BC, BM, si son mouvement avoit continué à être accéléré. Or pour cela il faut que DN soit tangente (2). On démontrera la même chose dans le cas du mouvement retardé; d'où il s'ensuit, en général, en tirant la tangente DN, que PN seroit l'espace que le corps parcourroit dans le tems BC au lieu de PE. Dans ce cas (*art.* 14) $\frac{PN}{DP}$ exprimeroit sa vîtesse; or le rapport de PN à DP, est le même que celui de l'élément de BD à l'élément de AB, parce que DN est tangente. Donc si on nomme en général t le tems, e l'espace correspondant parcouru par le corps, u la vîtesse à la fin du tems t, on aura $u = \frac{de}{dt}$.

Si on prolonge la tangente DN (*Fig.* 3 *et* 4.) jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en F; BF exprimera le tems que le corps employeroit à parcourir uniformément BD avec la vîtesse qu'il a au point D. Donc si par le point A on tire Ad parallèle à FD; Bd sera l'espace

(2) Il est visible qu'on ne peut supposer que le corps décrive par son mouvement uniforme un espace PO plus petit que l'espace PN terminé par la tangente DN; car PO seroit alors plus petit que DX, puisque $PO = Dy$. On ne peut supposer non plus qu'il décrive un espace PR plus grand que PN, car alors on pourroit toujours supposer le point T tellement placé, que l'espace TG' parcouru uniformément pendant le tems DT fût plus grand que l'espace TG terminé à la courbe, ce qui ne se peut.

que ce même corps parcourroit uniformément avec cette même vîtesse dans le tems AB.

On voit par-là (*Fig.* 3) que si ADE, par exemple, est une parabole, c'est-à-dire, si les espaces BD, CE sont entr'eux comme les quarrés des tems, on aura $AB = 2\,BF$; et $Bd = 2\,BD$.

COROLLAIRE I.

16. Les espaces NE, ne, sont les espaces que le corps parcourt pendant les tems BC, Bc, de plus ou de moins que les espaces PN, pn qu'il eût parcourus uniformément avec la vîtesse qu'il a en D. Or si on suppose les tems BC, Bc, infiniment petits, les lignes NE, ne, sont entr'elles comme le quarré de BC au quarré de Bc. Car l'arc DE à cause de sa petitesse infinie, peut être regardé comme un arc de cercle; or soit DN (*Fig.* 6) la partie infiniment petite de la tangente d'un arc de cercle; et par le point N, et un autre point n quelconque de cette partie, soient tirées à volonté les parallèles NQ, nq; on aura par la propriété un cercle $NE \times NQ = DN^2$; $ne \times nq = Dn^2$; et à cause que les lignes nq, NQ doivent être regardées comme égales, on aura $NE : ne :: DN^2 : Dn^2$. Or (Fig. 3 et 4) $DN : Dn :: BC : Bc$, et par conséquent en général $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$.

COROLLAIRE II.

17. Il est clair que les espaces NE, ne, seroient ceux

que la *cause accélératrice* feroit parcourir au corps, dans les instans BC, Bc, si au commencement de ces instans il n'avoit aucune vîtesse. Donc les espaces parcourus par un corps en vertu d'une puissance accélératrice quelconque, sont au commencement du mouvement comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE III.

18. Donc en regardant BC ou dt, comme constant on pourra supposer $\frac{NE}{BC^2} = F$, F étant une quantité quelconque (3) qui variera si l'on veut pour chaque abscisse AB, mais qui pourra être censée constante, tant que AB ne variera qu'infiniment peu.

COROLLAIRE IV.

19. Si dans un cercle quelconque RDQ (*Fig.* 6) on tire les cordes infiniment petites RD, DE, lesquelles soient égales, ou différent l'une de l'autre d'une quantité infiniment petite par rapport à elles, et qu'on prolonge RD en O ensorte que $DO = RD$, qu'enfin on mène par les points O, E la ligne OQ et par le point D la tangente DN qui rencontre OQ en N; on

---

(3) La proportion $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$ donne $\frac{NE}{BC^2} = \frac{ne}{Bc^2}$; donc si $\frac{NE}{BC^2}$ est exprimé par F, $\frac{ne}{Bc^2}$ sera aussi exprimé par F, F gardant la même valeur, et parconséquent F reste la même lorsque AB varie infiniment peu.

aura par la propriété du cercle $DN^2 = NE \times NQ$; $OD \times OR$ ou $2DO^2 = OE \times OQ$; donc à cause que les lignes DN et DO, NQ et OQ doivent être regardées comme égales, on aura $OE = 2NE$ (4).

Donc si on considère l'élément DE d'une courbe quelconque ADE (Fig. 3 et 4) comme un petit arc de cercle, ce qu'on peut supposer sans erreur, il s'ensuit que la différence seconde OE de l'espace parcouru, est double de l'espace réel NE, que la puissance accélératrice ou retardatrice feroit parcourir au corps dans l'instant BC; quoique ces deux lignes OE, NE paroissent être égales dans la courbe considérée comme polygone, parce qu'alors la tangente DN se confond avec le prolongement DO du petit côté RD de la courbe.

COROLLAIRE V.

20. Donc si on appelle e l'espace parcouru BD pendant le tems t, on aura $dde = 2NE$, et puisque $\frac{NE}{BC^2} = F$, on aura $\frac{dde}{dt^2} = 2F$; donc en général l'on peut sup-

(4) Lorsque les lignes OD, DE, sont égales, on peut démontrer rigoureusement que $OE = 2NE$. Car le triangle DOE est isocèle, l'angle ODE a pour mesure la moitié de l'arc RDE, et l'angle NDE la moitié de l'arc DE. D'où il s'ensuit que DN divise l'angle ODE en deux également, et qu'ainsi à cause de $DO = DE$, on a $OE = 2NE$. Mais la démonstration que nous avons donnée dans le texte, s'étend encore au cas où OD, DE différeroient d'une quantité infiniment petite par rapport à elles, et par conséquent ne seroient pas rigoureusement égales.

poser que l'équation différentio-différentielle de la courbe ADE est $\varphi\, dt^2 = \pm\, dde$, φ exprimant une fonction quelconque de e et de t, ou même de ces grandeurs et de leurs différences ; le signe + étant pour le cas où le mouvement est accéléré, c'est-à-dire, où la courbe ADE est convexe vers AC, et le signe — pour le cas où le mouvement est retardé, c'est-à-dire, où la courbe ADE est concave vers AC.

COROLLAIRE VI.

21. Puisque (*art.* 15) $u = \frac{de}{dt}$, on aura à cause de dt constant, $dde = du\,dt$; donc l'équation précédente $\varphi\, dt^2 = \pm\, dde$ se changera en celle-ci $\varphi\, dt = \pm\, du$, ou $\varphi\, de = \pm\, u\, du$.

Remarques sur les forces accélératrices, et sur la comparaison de ces forces entr'elles.

REMARQUE I.

22. Le mouvement uniforme d'un corps ne peut être altéré que par quelque cause étrangère. Or de toutes les causes, soit occasionnelles, soit immédiates, qui influent dans le mouvement des corps, il n'y a tout au plus que l'impulsion seule dont nous soyons en état de déterminer l'effet par la seule connoissance de la cause, comme on le verra dans la seconde partie de cet ouvrage. Toutes les autres causes nous sont entièrement inconnues; elles ne peuvent par conséquent se manifester à nous, que par

l'effet qu'elles produisent en accélérant ou retardant le mouvement des corps, et nous ne pouvons les distinguer les unes des autres que par la loi et la grandeur connue de leurs effets, c'est-à-dire, par la loi et la quantité de la variation qu'elles produisent dans le mouvement. Donc, lorsque la cause est inconnue, ce qui est le seul cas dont il soit question ici, l'équation de la courbe ADE doit être donnée immédiatement, ou en termes finis, ou en quantités différentielles. L'équation est donnée ordinairement en différences, lorsque le mouvement est accéléré ou retardé suivant une loi arbitraire et de pure hypothèse. Elle est au contraire donnée ordinairement en termes finis, quand la loi du rapport des espaces aux tems est découverte par l'expérience. Ainsi, supposons que la puissance qui accélère soit telle que le corps reçoive continuellement dans des instans égaux des degrés égaux de vîtesse; alors dt étant constant, du le sera aussi, et par conséquent φ sera une quantité constante. L'équation $\varphi\, dt = du$ sera en ce cas donnée immédiatement par hypothèse. Supposons, au contraire, que dans un cas particulier on découvre par l'expérience que les espaces finis parcourus depuis le commencement du mouvement, sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'équation de la courbe ADE sera $e = \frac{at^2}{T^2}$, a étant l'espace parcouru pendant un tems constant quelconque T; d'où l'on tire $ddc = \frac{2adt^2}{T^2}$ et $du = \frac{2adt}{T^2}$. On voit par-là que dans cette supposition les accroisse-

mens de vîtesse à chaque instant sont égaux, ce qu'on exprime autrement en disant que la force accélératrice φ est constante; ainsi, dans ce cas et dans d'autres semblables, les équations différentielles $\varphi\, dt^2 = \pm\, dde$, $\varphi\, dt = \pm\, du$, se tirent de l'équation donnée de la courbe ADE en termes finis.

Il est donc évident que quand la cause est inconnue, l'équation $\varphi\, dt = \pm\, du$ est toujours donnée (5).

La plupart des Géomètres présentent sous un autre point de vue l'équation $\varphi\, dt = du$ entre les tems et les vîtesses. Ce qui n'est, selon nous, qu'une hypothèse, est érigé par eux en principe. Comme l'accroissement de la

---

(5) On vient de voir que de quelque manière que le mouvement soit accéléré ou retardé, l'équation différentio-différentielle de la courbe sera toujours de cette forme $\pm\varphi\, dde = dt^2$. Or si on veut faire usage de cette équation, ainsi que des équations $\varphi\, dt = \pm\, du$ et $\varphi\, de = \pm\, u\, du$ pour déterminer dans un mouvement quelconque la relation entre u, t, e, il faut connoître φ, et l'on pourroit penser que pour cet effet la connoissance de la cause qui accélère ou retarde le mouvement seroit nécessaire; l'objet de la remarque est de faire voir que non, mais que φ est toujours donné par la définition même de l'espèce de mouvement dont il est question; ainsi, conformément à cette même remarque, quand on voudra faire usage des équations $\varphi\, dt^2 = \pm\, dde$, $\varphi\, dt = \pm\, du$ et $\varphi\, de = \pm\, u\, du$ pour déterminer la relation des espaces, des vîtesses et des tems dans un mouvement dont la loi sera donnée, il suffira de substituer dans ces équations à la place de φ une quantité propre à exprimer la loi suivant laquelle on supposera que se font les augmentations ou diminutions de vîtesse: quand on supposera, par exemple, que les diminutions instantanées de vîtesse sont comme les quarrés de la vîtesse, on écrira $gu^2\, dt = -du$, $gu^2\, de = -u\, du$ (g étant un coefficient constant), et ainsi du reste.

vîtesse

vîtesse est l'effet de la cause accélératrice, et qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces Géomètres ne regardent pas seulement la quantité φ comme la simple expression du rapport du à dt; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant constant; de là ils tirent cet axiome général, que le produit de la force accélératrice par l'élément du tems est égal à l'élément de la vîtesse. M. *Daniel Bernouilli*, *(Mém de Pétersb. T. I.)* prétend que ce principe est seulement de vérité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cause et la manière dont elle agit, nous ne pouvons savoir si son effet lui est réellement proportionnel, ou s'il n'est pas comme quelque puissance ou quelque fonction de cette même cause. M. *Euler*, au contraire, s'est efforcé de prouver fort au long dans sa mécanique, que ce principe est de vérité nécessaire. Pour nous, sans vouloir discuter ici si ce principe est de vérité nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition, et d'entendre seulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vîtesse est proportionnel. Ainsi au lieu de dire que l'accroissement de vîtesse à chaque instant est constant, ou que cet accroissement est comme le quarré de la distance du corps à un point fixe, ou etc. nous dirons simplement pour abréger et pour nous conformer d'ailleurs au langage ordinaire, que la force accélératrice est constante, ou qu'elle est comme le quarré

de la distance, ou etc. et en général, nous ne prendrons jamais le rapport de deux forces que pour celui de leurs effets, sans examiner si l'effet est réellement comme sa cause, ou comme une fonction de cette cause: examen entièrement inutile, puisque l'effet est toujours donné indépendamment de la cause, ou par expérience, ou par hypothèse.

Ainsi nous entendrons en général par la force motrice le produit de la masse qui se meut par l'élément de sa vîtesse, ou, ce qui est la même chose, par le petit espace qu'elle parcourroit dans un instant donné en vertu de la cause qui accélère ou retarde son mouvement; par force accélératrice, nous entendrons simplement l'élément de la vîtesse. Après de pareilles définitions, il est aisé de voir que tous les problêmes qu'on peut proposer sur le mouvement des corps mus en ligne droite, et animés par des forces qui tendent vers un centre, ou exerçant les uns sur les autres une attraction mutuelle suivant une loi quelconque, sont des problêmes qui appartiennent pour le moins autant à la géométrie qu'à la mécanique, et dans lesquels la difficulté n'est que de calcul, pourvu que le mobile soit regardé comme un point.

On imagineroit peut-être que l'équation $\varphi dt = \pm du$ regardée, non comme hypothèse, mais comme principe, seroit au moins nécessaire pour calculer les effets dont les causes sont connues, comme l'impulsion, surtout quand cette impulsion consiste en de petits coups réitérés. J'espère qu'on verra dans la seconde partie de

cet ouvrage, que non-seulement ce prétendu principe est encore inutile dans ce cas, mais que l'application en est insuffisante et pourroit même être fautive.

REMARQUE II.

23. Il n'est pas inutile de remarquer que quand on a d'abord l'équation entre e et t en termes finis, et qu'on en tire par la différentiation à l'ordinaire l'équation $ddc = \varphi\, dt^2$, la valeur de ddc qu'on trouve par ce calcul est précisément celle de OE, véritable différence seconde de BD; on pourroit d'abord douter (6),

(6) Il suffit pour former ce doute de se rappeller le principe d'après lequel on trouve les différences secondes. Supposant $AM = t$ (Fig. 8.) et $MP =$ une fonction de t que je représente par $\varphi(t)$; pour avoir ID on suppose que t devienne $t + dt$, et alors BD étant $= \varphi(t+dt)$, on a $ID = \varphi(t+dt) - \varphi(t)$ en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre et des ordres ultérieurs. Ensuite pour avoir EO on suppose dans la valeur de ID que t devienne $t+dt$, et on néglige dans ce calcul les quantités infiniment petites du troisième ordre et des ordres ultérieurs pour avoir la valeur de RE, ensorte qu'on prend pour ddc la différence entre cette valeur de RE et celle qu'on a trouvé pour ID. Mais il faut remarquer que puisque dans la valeur de ID on a négligé les quantités du second ordre, cette omission peut influer sur la différence cherchée des lignes ID, RE, laquelle différence est infiniment petite du second ordre, par conséquent on n'est en droit de conclure que OE est égal à la valeur de ddc, qu'autant qu'on aura fait voir que l'omission dont il s'agit, ne produit dans le calcul qu'une erreur infiniment petite au-dessous du second ordre.

Pour y parvenir nous allons d'abord démontrer une proposition que notre auteur a donnée dans ses *recherches sur le système du monde*. Soit $\varphi(z+\xi)$ une fonction de $z+\xi$, ξ étant une quantité très-petite dont on suppose que z augmente, on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi(z) + \xi\Delta(z) + \frac{\xi^2\Gamma(z)}{2} +$ etc

vu la nature même du calcul différentiel, si la valeur de dde trouvée par cette différentiation représente véritablement OE, ou quelque autre ligne, par exemple NE. Mais on peut se convaincre par le calcul même que la quantité trouvée φdt^2 est égale à OE.

REMARQUE III.

24. Nous avons vu ci-dessus (*art.* 15) que quand les espaces parcourus sont comme les quarrés des tems cor-

---

$\Delta(z)$ étant le coefficient de dz dans la différentiation de $\varphi(z)$, et $\Gamma(z)$ celui de dz dans la différentiation de $\Delta(z)$. Car si on suppose $\varphi(z+\xi) = \varphi(z) + u$ et qu'on différentie en supposant z constant (ce qui est permis ici, puisqu'on suppose que z ne croît actuellement que de la quantité ξ) on aura $d\xi\,\Delta(z+\xi) = du$; soit $\Delta(z+\xi) = \Delta(z) + r$, on aura $d\xi\,\Gamma(z+\xi) = dr$; soit $\Gamma(z+\xi) = \Gamma(z) + s$, on aura $d\xi\,\Pi(z+\xi) = ds$, donc en continant de la même manière, on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi(z) + \int d\xi\,\Delta(z) + \int d\xi \int d\xi\,\Gamma(z) + \int d\xi \int d\xi \int d\xi\,\Pi(z)$ etc.

$$= \varphi(z) + \xi\Delta(z) + \frac{\xi^2\Gamma(z)}{2} + \frac{\xi^3\Pi(z)}{2.3} + \text{etc.}$$

Cela posé, MP étant $= \varphi(t)$ on a

$$BD = \varphi(t+dt) = \varphi(t) + dt\,\Delta(t) + \frac{dt^2\Gamma(t)}{2} + \text{etc.}$$

$$CE = \varphi(t+2dt) = \varphi(t) + 2dt\,\Delta(t) + 2dt^2\Gamma(t) + \text{etc.}$$

Donc $ID = dt\,\Delta(t) + \dfrac{dt^2\Gamma(t)}{2}$

$RE = dt\,\Delta(t) + \frac{1}{2}dt^2\Gamma(t)$

$RE - ID$ ou $- OE$ ou $- dde = dt^2\Gamma(t)$.

Mais par les méthodes ordinaires du calcul différentiel, on auroit

$ID = dt\,\Delta(t)$

$RE = dt\,\Delta(t+dt) = dt\,\Delta(t) + dt^2\Gamma(t)$

donc $RE - ID$ ou $- OE$ ou $- dde = dt^2\Gamma(t)$.

Donc le dde que donne le calcul différentiel est en effet la vraie valeur de OE.

respondans, un corps qui parcourt un espace E dans le tems T, parcourroit uniformément dans le même tems l'espace $2E$ avec la vîtesse qu'il a à l'extrémité de l'espace E. Or quelle que soit la puissance accélératrice ou retardatrice, les espaces ne, NE parcourus en vertu de cette puissance, durant les instans Bc, BC, sont entr'eux comme les quarrés de ces instans. D'où il s'ensuit que dans la courbe polygone, OE ou $dde = 2NE$ considérée comme l'effet de la puissance accélératrice ou retardatrice, doit être regardée comme parcourue d'un mouvement uniforme avec la vîtesse infiniment petite que le corps a acquis à la fin de l'instant BC. On voit par-là de quelle manière on peut réduire à un mouvement uniforme l'effet instantané de la puissance qui accélère ou qui retarde le mouvement.

REMARQUE IV.

25. Dans la courbe polygone les effets de la force accélératrice pendant les instans Bc, BC (*fig.* 7.) sont représentés par les lignes $O'E'$, OE; ces espaces $O'E'$, OE sont évidemment entr'eux comme les tems Bc, BC, à cause des triangles semblables $DE'O'$, DEO; et cette proposition sert à confirmer ce que nous venons de remarquer, que l'espace OE est censé parcouru uniformément pendant le tems BC; car quand les espaces $O'E'$, OE sont entr'eux comme les tems Bc, BC employés à les parcourir, le mouvement est uniforme.

De là il s'ensuit que puisque dans la courbe polygone l'effet de la puissance accélératrice est représenté par un mouvement uniforme, on ne doit point supposer dans cette hypothèse que la vîtesse du corps s'accélère par degrés pendant l'instant BC, mais qu'au commencement de cet instant BC, lorsque le corps a parcouru l'espace BD, sa vîtesse reçoive brusquement et comme d'un seul coup toute l'augmentation ou la diminution qu'elle ne doit réellement avoir qu'à la fin de l'instant BC.

Pour confirmer cette remarque, on peut observer que TE, RE (*fig.* 8.) sont les espaces que le corps parcourt réellement durant les instans Bc, BC, dans l'hypothèse de la courbe polygone; que ces espaces sont parcourus uniformément, puisqu'ils sont entr'eux comme les tems Bc, BC; qu'ainsi la vîtesse pendant l'instant BC est censée uniforme, et qu'elle est à la vîtesse dans l'instant précédent BM comme RE est à ID. D'où il s'ensuit qu'au commencement de l'instant BC, la vîtesse change brusquement, suivant le rapport de RE à ID.

Au contraire dans la courbe rigoureuse, les effets de la puissance accélératrice ou retardatrice pendant les instans Bc, BC, sont représentés par ne, NE (*fig.* 7) et sont entr'eux, comme les quarrés de ces instans; dans ce cas la vitesse est censée s'accélérer ou se retarder uniformément pendant tout le cours de l'instant BC, en vertu de la puissance accélératrice, qui est censée donner au mobile pendant cet instant une suite de petits

coups égaux et réitérés; et la somme de ces petits coups est égale au coup unique, que la même puissance est censée donner au corps dès le commencement de l'instant BC dans l'hypothèse de la courbe polygone.

On pourroit faire ici une difficulté qu'il est bon de prévenir. L'équation trouvée $ddc = \varphi\, dt^2$ appartient à la courbe rigoureuse et à la courbe polygone; donc puisque φ est regardée comme constante pendant l'instant BC, ddc ou OE est proportionnelle à dt^2; c'est-à-dire au quarré de BC, même dans la courbe polygone; cependant nous venons de voir que les lignes $E'O'$, EO sont proportionnelles aux lignes Bc, BC. Comment accorder ces deux propositions? La réponse est très-simple; c'est que $E'O'$ n'est pas le ddc qui répond à l'instant Bc; comme il est facile de s'en assurer (7) par la seule inspection de la figure 7.

(7) Il faut remarquer que ce qui détermine EO pour la différence seconde de la ligne MP, c'est la supposition que les trois points P, D, E soient à la courbe rigoureuse; or PD, DE étant considérés comme soutendantes de cette courbe, il est impossible que le point E' lui appartienne, ainsi EO n'est point le ddc qui répond à Bc. EO étant supposé le ddc qui répond à BC, pour déterminer celui qui répond à Bc, il faut prendre $Bm = Bc$, et ayant tiré mp parallèle à BD, qui rencontre la courbe en p, on tirera pDo, qui rencontre en o la ligne ceo parallèle à BD, et alors eo sera le ddc qui répond à Bc; il y aura seulement cette différence, que la courbe polygone, au lieu d'être considérée comme ayant DP et DE pour côtés contigus, sera considérée comme ayant Dp et De pour côtés; par conséquent (DN étant la tangente de la courbe rigoureuse au point D, et ne double de ne) puisqu'on a $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$, on a aussi $QE : oe :: BC^2 : Bc^2$;

REMARQUE V.

26. Les Géomètres doivent prendre garde à cette distinction des courbes polygones et des courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices et dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothèse de la courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothèse; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement (8).

REMARQUE VI.

27. Si on suppose une puissance accélératrice constante p telle que la pesanteur, en vertu de laquelle un

---

ainsi les ddc sont toujours comme les dt^2, et les lignes OE, $O'E'$ terminées à la courbe polygone et à sa tangente restent comme les dt.

(8) On peut estimer l'effet d'une cause accélératrice de deux manières, ou par l'espace qu'elle fait naturellement parcourir dans un instant, ou par celui que le corps pourroit parcourir pendant un instant égal avec la vîtesse acquise pendant ce premier instant, continuée uniformément. Dans le premier cas NE, (fig. 3 et 4.) marque cet effet, DN étant tangente de la courbe rigoureuse; dans le second cas, l'effet est marqué par OE double de NE, DO étant tangente de la courbe polygone. On est maître d'estimer l'effet de la cause accélératrice de l'une ou de l'autre de ces deux manières; mais lorsqu'on aura deux causes accélératrices à comparer, il faudra observer que si on a exprimé un des effets par NE dans la courbe qui représente les espaces que l'une fait décrire, l'autre effet soit de même exprimé dans sa courbe correspondante par la ligne correspondante; et c'est là ce qu'on entend lorsqu'on dit que si un des effets a été calculé dans l'hypothèse de la courbe rigoureuse, l'autre doit être calculé dans la même hypothèse, etc.

corps

corps parcourre l'espace fini z pendant le tems fini θ, on aura $\varphi : p :: \frac{dde}{dt^2} : \frac{2z}{\theta^2}$ (9), ou $\varphi : p :: \frac{NE}{dt^2} : \frac{z}{\theta^2}$.

Donc $\varphi\, dt^2 = \frac{p\, dde\, .\, \theta^2}{2z}$ ou $dde = \frac{2\varphi z dt}{p\theta^2}$, et $NE = \frac{\varphi z dt^2}{p\theta^2}$.

Il faut se donner de garde d'écrire $dde = \frac{\varphi z dt^2}{p\theta^2}$, comme on pourroit y être porté en prenant dde pour NE; car il est évident que par cette opération on n'auroit que la moitié de la valeur de dde qui est égale à $2NE$; ainsi en intégrant on n'auroit que la moitié de la valeur de e. Veut-on s'en assurer par un exemple

---

(9) On se propose dans cette remarque de comparer toute force accélératrice à la pesanteur; et voici le fondement de cette comparaison : l'équation $\varphi dt^2 = dde$ donne $\varphi = \frac{dde}{dt^2}$; par la même raison $p = \frac{ddz}{d\theta^2}$; mais au lieu du rapport $\frac{ddz}{d\theta^2}$ on peut substituer un rapport de quantités finies, en observant que les espaces parcourus naturellement en vertu d'une puissance accélératrice constante, sont comme les quarrés des tems; ainsi on a $d\theta^2 : \theta^2 :: \frac{ddz}{2} : z$; (on observera que nous avons mis $\frac{ddz}{2}$ dans la proportion, et non pas ddz, parce que ddz, comme on l'a déja dit, est double de l'espace réel, que la puissance feroit naturellement parcourir pendant l'instant $d\theta$). On aura donc $\frac{ddz}{d\theta^2} = \frac{2z}{\theta^2}$, et par conséquent $\varphi : p :: \frac{dde}{dt^2} : \frac{2z}{\theta^2}$, ce qu'on peut encore démontrer d'une autre manière; car en intégrant l'équation $p d\theta^2 = ddz$ on a l'équation $p\theta^2 = 2z$, qui étant comparée à l'équation $dde = \varphi dt^2$ donne la même proportion.

simple? Qu'on suppose $\varphi = p$, c'est-à-dire la puissance constante et égale à la pesanteur; on sait que les espaces e, z, sont alors entr'eux comme les quarrés des tems t^2, θ^2; donc on a $e = \frac{z t^2}{\theta^2}$, et c'est ce que donne en effet (quand on l'intègre) l'équation $d\,d\,e = \frac{2 \varphi z d t^2}{p \theta^2}$ ou $dde = \frac{2 z d t^2}{\theta^2}$: au lieu que l'équation $dde = \frac{z d t^2}{\theta^2}$ ne donneroit que $e = \frac{z t^2}{2 \theta^2}$, c'est-à-dire la moitié de la valeur e.

CHAPITRE II.

Du mouvement composé.

THÉORÊME.

28. *Si deux puissances quelconques agissent à la fois sur un corps ou point* A (fig. 9) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, et qu'on achève le parallélogramme* A B D C; *je dis que le corps* A *parcourra la diagonale* A D *uniformément, dans le même tems qu'il eût parcouru* A B *ou* A C.

Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le corps A; il est certain *(art. 6)* que cette ligne sera une ligne droite, et que le corps A la parcourra uniformément. Il n'est pas moins évident qu'elle sera dans le plan des lignes AB, AC, puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, si lorsque le corps est arrivé à un point quelconque g de cette ligne, on supposoit que deux puissances vinssent à agir sur lui, dont l'une tendît à le mouvoir suivant gc parallèle à AC avec la même vîtesse qu'il a en A suivant AC, et en sens contraire, et l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne go égale

et parallèle à AB, et en sens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il est clair que le corps resteroit en repos au point g. Car sa vîtesse et sa direction au point g est précisément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puissances égales et parallèles aux puissances suivant AB et AC, et par conséquent égales et contraires aux puissances suivant go, gc.

Cela posé, imaginons que le corps A qui décrit la ligne Ag, soit sur un plan $KLMH$ qui puisse glisser librement entre les deux coulisses KL, IM, parallèles à AC. Qu'on fasse mouvoir ce plan entre les deux coulisses, de manière que tous ses points g décrivent des lignes gc égales et parallèles à AC, dans le même tems que le corps A eût décrit la ligne AC; et qu'en même tems les deux coulisses se meuvent en emportant le plan parallèlement à AB, et en sens contraire, avec une vîtesse égale à celle que le corps A auroit eue suivant AB; il est évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales et parallèles à la diagonale AD du parallélogramme BC. Il est de plus évident que le corps ou point mobile A, est tiré continuellement en cet état par quatre puissances contraires et égales deux à deux, et que par conséquent il doit rester en repos dans l'espace absolu. D'où il s'ensuit, que quand le corps ou point mobile A est arrivé à un point g du plan, ce point g doit se trouver à la place que le corps occupoit quand il a commencé de se mouvoir. Ce qui ne sauroit être, à moins que la ligne Ag ne tombe

sur la diagonale AD, et le point g sur le point D (10). Donc, etc.

Remarque.

29. La démonstration qu'on apporte d'ordinaire du Théorême précédent, consiste à imaginer que le point A se meuve uniformément sur une règle AB avec la vîtesse qu'il a reçue suivant AB, et qu'en même tems la ligne ou règle AB se meuve suivant AC avec la vîtesse que le corps A a reçue suivant AC. On prouve très-bien dans cette supposition, que le point mobile A décrit la diagonale AD. En général la plupart des démonstrations communes de cette proposition sont fondées sur ce qu'on regarde les deux puissances suivant AB et AC, comme agissant sur le corps A pendant tout le tems de son mouvement, ce qui n'est pas précisément l'état de la question. Car l'hypothèse est que le corps A tend à se mouvoir au premier instant suivant AB et AC à la fois, et l'on demande la direction et la vîtesse qu'il doit avoir en vertu du concours d'action des deux puissances.

---

(10) Puisque le point mobile A doit rester en repos dans l'espace absolu, il faut que le mouvement du plan sur lequel on le suppose, l'emporte en sens contraire précisément de la même quantité dont il se seroit avancé sans le mouvement du plan; donc quand il a décrit une ligne $= Ag$, le point du plan qui étoit en g, au commencement du mouvement, doit avoir décrit gA et être par conséquent en A; d'un autre côté ce point a dû décrire une ligne parallèle à la diagonale AD; donc la ligne Ag ne peut être que la diagonale même.

Dès qu'il a pris une direction moyenne AD, les deux tendances suivant AB et AC n'existent plus; il n'y a plus de réel que sa tendance suivant AD.

J'ai donc cru devoir prévenir cette difficulté, et faire voir que le chemin du corps A est le même, soit que les deux puissances n'agissent sur lui que dans le premier instant, soit qu'elles agissent continuellement toutes deux à la fois sur le corps. C'est à quoi je crois être parvenu dans la démonstration que j'ai donnée ci-dessus.

COROLLAIRE I.

30. Si un corps parcourt ou tend à parcourir une ligne droite AC (*fig.* 10) avec une vîtesse quelconque, et qu'on prenne un point B par-tout où l'on voudra sur cette ligne AC prolongée ou non, la vîtesse AC pourra être regardée comme composée de la vîtesse AB et de la vîtesse BC. Car AC peut être regardée comme la diagonale d'un parallélogramme, dont AB, BC sont les côtés. Donc, etc.

REMARQUE.

31. Quelques lecteurs pourront être surpris de ce que je tire la démonstration d'une proposition si simple en apparence, d'un cas général beaucoup plus composé; mais on ne peut, ce me semble, démontrer autrement la proposition dont il s'agit ici, qu'en regardant comme un axiome incontestable, que l'effet de deux causes conjointes est égal à la somme de leurs effets pris séparé-

ment, ou que deux causes agissent conjointement comme elles agiroient séparément ; principe qui ne me paroît pas assez évident, ni assez simple, qui tient d'ailleurs de trop près à la question des forces vives, et au principe des forces accélératrices dont nous avons parlé ci-dessus *art.* 22. C'est la raison qui m'a obligé à éviter d'en faire usage, ayant d'ailleurs pour but dans ce traité de réduire la mécanique au plus petit nombre de principes possible, et de tirer tous ces principes de la seule idée du mouvement, c'est-à-dire de l'espace parcouru et du tems employé à le parcourir, sans y faire entrer en aucune façon les puissances et les causes motrices.

COROLLAIRE II.

32. Si un corps est poussé suivant AB et AC (*Fig.* 11) par deux puissances accélératrices quelconques, sa direction sera la diagonale d'un parallélogramme fait sur des côtés AB, AC, proportionnels aux forces accélératrices suivant AB et AC; et sa force accélératrice suivant AD sera à chacune des deux suivant AB et AC, comme AD est à AB et AC. Car soient Ab et Ac les espaces que le corps A eût parcourus dans le commencement de son mouvement en vertu de chacune des puissances, on aura (*art.* 22) $Ab : Ac :: AB : AC$. Donc les lignes bd, cd, parallèles à AC, AB concourront au point d de la diagonale AD. De même si $A\beta$, Ax, sont les espaces parcourus en tems égaux en vertu de ces mêmes puissances, on aura $Ab . A\beta ::$

le quarré du tems par Ab ou par Ac au quarré du tems par $A\beta$ ou par Ax, c'est-à-dire comme Ac est à Ax; donc le point de concours δ des lignes $\beta\delta$, $x\delta$, sera encore sur la diagonale AD. Donc si on suppose que le corps A se meuve sur la règle AB au premier instant, avec la force accélératrice qu'il a suivant AB, et que la puissance accélératrice suivant AC, agisse en même-tems sur la règle pour la porter de A vers C, le point A décrira la diagonale Ad, dans le même tems qu'il auroit décrit Ab ou Ac, et sa force accélératrice suivant AD, sera à chacune des forces suivant les côtés, comme la diagonale à chacun de ces mêmes côtés.

De là on voit comment à une force accélératrice quelconque, on peut en substituer d'autres, en tel nombre qu'on voudra.

Au reste, comme nous avons vu ci-dessus (*art.* 24) de quelle manière on peut réduire à un mouvement uniforme l'effet instantané d'une puissance quelconque; il est clair que la combinaison des effets de tant de puissances qu'on voudra, et la recherche de l'effet unique qui en résulte, se réduit par là fort aisément aux loix du mouvement composé uniforme.

Du mouvement en ligne courbe, et des forces centrales.

33. Comme un corps tend de lui-même à se mouvoir en ligne droite, il ne peut décrire une ligne courbe, qu'en vertu de l'action d'une puissance qui le détourne continuellement

continuellement de sa direction naturelle. On peut déduire de l'article précédent, les principes du mouvement d'un corps sur une courbe.

Il est démontré qu'un arc infiniment petit d'une courbe quelconque, peut être pris pour un arc de cercle, dont le rayon seroit égal au rayon de la développée de cet arc de la courbe. On réduit par ce moyen le mouvement d'un corps sur une courbe quelconque, au mouvement de ce même corps sur un cercle dont le rayon change à chaque instant.

La puissance qui retient un corps sur une courbe, est appelée particulièrement *force centrale*, quand elle est toujours dirigée vers un point fixe; mais nous la nommerons ici *force centrale* en général, soit qu'elle tende vers un point fixe ou non. Cette puissance n'est par sa nature qu'une puissance accélératrice ou retardatrice, dont la direction est différente de celle du corps. On peut, par tout ce qui a été dit ci-dessus, (*art.* 24 *et* 32) réduire à un mouvement uniforme l'effet instantané de cette puissance, en regardant comme un polygone d'une infinité de côtés la courbe qu'elle fait décrire au corps; et cet effet est double de celui que la force centrale produiroit dans la courbe considérée exactement comme courbe. Ainsi, supposons qu'un corps décrive un arc de cercle infiniment petit RDE (*Fig.* 6), en vertu d'une puissance, qui au point D le détourne de la ligne droite suivant une direction donnée : si on regarde le cercle comme un polygone, la corde RD sera la ligne

que le corps aura décrite dans l'instant précédent, et DO égale et en ligne droite avec RD, celle qu'il tend à décrire l'instant suivant. Donc tirant OE parallèle à la direction de la force centrale en D, OE sera l'effet instantané de cette puissance; au contraire, si on considéroit le cercle comme cercle rigoureux, la tangente DN seroit la ligne que le corps tendroit à décrire, et NE l'effet de la puissance qui le retiendroit sur la courbe.

La ligne NE divisée par le quarré du tems employé à la parcourir, est (*art.* 18, 22 *et* 26) l'expression de la force accélératrice en vertu de laquelle le corps décrit la courbe; or cette ligne NE est égale au quarré de la ligne DN ou de l'arc DE ou RD, divisé par NQ, et NQ est au diamètre du cercle, comme le sinus de l'angle que fait la force centrale avec la courbe, est au sinus total (11); de plus, la ligne DE divisée par le tems employé à la parcourir, est (*art.* 15) l'expression de la vîtesse du corps. Donc dans une courbe quelconque, l'effet de la force centrale est comme le quarré de la vîtesse divisé par le rayon de la développée, et multiplié par le rapport du sinus total au sinus de l'angle que fait cette force avec la courbe.

En général, l'élément du tems étant supposé constant, la force centrale est représentée par la ligne OE dans la courbe polygone, et par NE dans la courbe rigoureuse. Il faut par conséquent avoir égard à cette différence

(11) Car NQ ou EQ est le double du sinus de l'angle NED.

d'expression dans la comparaison des effets de deux forces centrales; et pour ne pas faire l'un des effets double de ce qu'il est par rapport à l'autre, il faut considérer les deux courbes, ou toutes deux comme polygones, ou toutes deux comme rigoureuses.

Les forces centrales, et en genéral toutes les forces accélératrices (si par le mot de *force* nous n'entendons que les effets) sont entr'elles comme les petits espaces qu'un corps parcourt dans un même instant en vertu de ces forces. On a coutume de comparer toutes ces forces à la force accélératrice constante que nous connoissons le mieux, je veux dire à la pesanteur. Si E est l'espace qu'un corps pesant parcourt dans un tems fini T, $\frac{E dt^2}{T^2}$ sera l'espace qu'il parcourra dans le tems dt, et si l'arc DE est supposé parcouru dans le même tems dt, la force centrale sera à la pesanteur, comme la ligne NE à $\frac{E dt^2}{T^2}$, ou comme $OE = 2NE$ à $\frac{2E dt^2}{T^2}$.

Or soit r le rayon de la développée de la courbe en N, S le sinus de l'angle que fait la direction de la force centrale avec la courbe, A le sinus total, e l'espace que le corps parcourroit uniformément dans le tems T avec la vîtesse qu'il a en D, on aura $DE = \frac{e dt}{T}$; $OE = \frac{DE^2}{r} \times \frac{A}{S} = \frac{e^2 dt^2 . A}{T^2 S r}$. Donc l'effet instantané de la pesanteur est à celui de la force centrale,

comme $2E$ à $\frac{e^2 A}{Sr}$ ou comme E à $\frac{e^2 A}{2rS}$; et ainsi le rapport de ces deux effets, que la plupart des Géomètres prennent pour celui des causes mêmes, est exprimé en termes finis (*).

CHAPITRE III.

Du mouvement détruit ou changé par des obstacles.

34. Un corps qui se meut peut rencontrer des obstacles qui altèrent ou même qui anéantissent tout-à-fait son mouvement; ces derniers, ou sont invincibles par eux-mêmes, ou n'ont précisément de résistance que ce qu'il en faut pour détruire le mouvement imprimé au corps.

Un obstacle invincible peut être tel qu'il ne permette au corps aucun mouvement, comme quand un corps tire une verge droite attachée à un point fixe; ou l'obstacle pourroit être de telle nature qu'il n'empêchât pas le corps de se mouvoir dans une autre direction que celle qu'il a, comme quand un corps rencontre un plan inébranlable.

35. Si l'obstacle, invincible ou non, que le corps

(*) On trouvera dans l'*Encyclopédie* au mot Force, plusieurs autres théorêmes et remarques sur la mesure de la force centrifuge. Ce que nous en disons ici, suffit pour l'objet que nous nous proposons.

rencontre, ne fait qu'altérer et changer son mouvement sans le détruire, ensorte que le corps ayant, par exemple, la vîtesse a avant que de rencontrer l'obstacle, il soit obligé de prendre une vîtesse b dont la quantité et la direction soit différente de la première; il est évident qu'on peut regarder la vîtesse a que le corps a lorsqu'il rencontre l'obstacle, comme composée de la vîtesse b et d'une autre vîtesse c, et qu'il n'y a que la vîtesse c qui ait été détruite par l'obstacle.

Foundation of d'Alembert's principle

36. De là il s'ensuit qu'un corps sans ressort qui vient choquer perpendiculairement un plan immobile et impénétrable, doit s'arrêter après ce choc et rester en repos. Car il est visible que si ce corps a du mouvement après la rencontre du plan, ce ne peut être qu'en arriére, et dans la direction de la perpendiculaire; soit u sa vîtesse avant le choc, v sa vîtesse en arrière, que je suppose $= mu$, m exprimant un nombre inconnu quelconque, on aura (*art.* 30 *et* 35) $u = -mu + u + mu$. Donc $u + mu$ est la vîtesse perdue par le corps à la rencontre du plan. Mais il n'y a point de raison pourquoi m soit plutôt tel nombre que tel autre. Car la seule condition par laquelle on puisse déterminer la vîtesse $u + mu$, est qu'elle doit être détruite par le plan : or puisque (*hyp.*) le plan est inébranlable, il n'y a point de raison pourquoi il anéantiroit plutôt la vîtesse $u + mu$, qu'une autre vîtesse $u + nu$. Donc le nombre m ne peut être plutôt tel nombre que tel autre. Donc il sera zéro. En effet, si la vîtesse $u + mu$ peut être anéantie par la rencontre

du plan, comme on le suppose, à plus forte raison la vîtesse u pourra être détruite par la rencontre de ce même plan. Donc elle sera détruite réellement : donc mu, et par conséquent v sera $= o$. Donc, etc.

COROLLAIRE I.

38. Si on suppose qu'un corps A (*Fig.* 12) mu suivant AB, rencontre le plan immobile et impénétrable BD, sur lequel il soit forcé de se mouvoir, sa vîtesse suivant BD sera à sa vîtesse suivant AB ou BC, comme le sinus du complément de l'angle CBD au sinus total. Car il faudra regarder la vîtesse BC, comme composée de deux autres, dont l'une BE soit perpendiculaire au plan BD, et l'autre BD soit dans ce même plan: or la vîtesse BE étant détruite par le plan, le corps A n'aura plus que la vîtesse BD qui sera à BC:: le sinus de l'angle BCD, complément de CBD, au sinus total.

COROLLAIRE II.

38. Si un corps se meut le long de plusieurs plans AB, BC, CD, etc. (*Fig.* 13 *et* 14) qu'on prolonge AB, et BC indéfiniment en F et en E; qu'ensuite d'un rayon arbitraire GL on décrive l'arc LM, et qu'on fasse $LGM = CBF$; qu'ayant après cela abaissé la perpendiculaire MK, on décrive l'arc du rayon GK l'arc NK, tel que l'angle $KGN = DCE$, et qu'on mène la perpendiculaire NI, et ainsi de suite; je dis que si on prend GL pour représenter la vîtesse suivant

AB, GI exprimera la vîtesse suivant CD. Cela suit évidemment du corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

39. Donc la somme des vîtesses perdues de A en D est égale à LI, c'est-à-dire à la somme des sinus verses des angles CBF, DCE, etc. en prenant successivement GL, GK, etc. pour sinus totaux.

COROLLAIRE IV.

40. Donc en prenant GL pour sinus total commun à tous les sinus verses, la vîtesse perdue sera moindre que la somme de ces mêmes sinus verses.

Du mouvement d'un corps le long d'une surface courbe.

LEMME.

41. *Si dans une courbe* ABCDR (Fig. 15) *après avoir tiré les tangentes* AY, RY, *on inscrit un polygone* ABCDR *dont les angles extérieurs* BAY, CBF, DCE, etc. *soient égaux entr'eux ; je dis qu'on peut imaginer ce polygone d'un si grand nombre de côtés, que la somme des sinus verses des angles* BAY, CBF, DCE, RDS, etc. *soit moindre qu'une grandeur donnée.*

Car la somme des angles BAY, CBF, DCE, etc. est égale à l'angle RYZ fait par les tangentes RY, AY de la courbe. Donc si l'on fait l'angle ryz (Fig. 16) $= RYZ$, l'angle $ryn =$ à un des angles BAY ou

CBF, et qu'on nomme n le nombre des angles; on aura, arc. $rn \times n =$ arc. rz, et $\frac{\text{cord. } rn^2}{rh} \times n =$ à la somme des sinus verses. Mais $\frac{\text{cord. } rn^2}{rh} \times n < \frac{\text{arc. } rn^2 . n}{rh} = \frac{\text{arc. } rz^2}{n.rh}$: soit l'arc $\frac{rz^2}{rh} = \pi . rl$ (π étant un nombre donné, puisque les lignes rh, rl, et l'arc rz sont donnés); la somme des sinus verses sera donc $< \frac{\pi . rl}{n}$. Or puisque π et rl sont des quantités constantes, on peut rendre n si grand, que $\frac{\pi \times rl}{n}$ soit moindre qu'une grandeur donnée; donc à plus forte raison, la somme des sinus verses sera moindre que cette même grandeur donnée.

THÉORÊME.

42. *Si un corps mu suivant une droite* XA (Fig. 15) *rencontre la surface courbe* AR, *touchée en* A *par* XA, *et sur laquelle il soit obligé de se mouvoir; je dis qu'il ne perdra de* A *en* R *aucune partie de sa vîtesse.*

Car on peut inscrire dans la courbe un polygone $ABCDR$ d'un si grand nombre de côtés, que la somme des sinus verses de ses angles extérieurs, soit toujours (*art.* 41) moindre qu'une grandeur donnée, et qu'ainsi à plus forte raison (*art.* 40) la vîtesse perdue de A en R soit toujours aussi petite qu'on voudra. Donc si ce polygone se confond avec la courbe, la vîtesse perdue de A en R sera zéro.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

43. Il résulte de là que quand un corps se meut sur une courbe, sa vîtesse à chaque point de la courbe est précisément altérée de la même manière, toutes choses d'ailleurs égales, que s'il se mouvoit sur la tangente de la courbe en ce point.

REMARQUE.

44. On démontre d'ordinaire ce dernier théorême en regardant la courbe comme un polygone $ABCDR$ d'une infinité de côtés, dont les angles extérieurs CBF sont infiniment aigus; les sinus verses de ces angles étant infiniment petits du second ordre, on en conclut qu'un corps ne perd à chaque instant qu'une partie de vîtesse infiniment petite du second genre, de sorte que la perte totale de A en R n'est qu'infiniment petite du premier.

La démonstration que j'ai donnée, quoique peut-être un peu longue, me paroît aussi plus lumineuse, d'autant que la vîtesse perdue de A en R est réellement et exactement nulle ou zéro, et non pas infiniment petite. Quand on veut démontrer en toute rigueur les propriétés des courbes, on tombe nécessairement dans des démonstrations un peu longues; la méthode des infiniment petits abrège beaucoup ces démonstrations, mais elle n'est pas si rigoureuse. Elle a de plus un autre inconvénient, c'est que les commençans, qui n'en pénètrent

pas toujours l'esprit, pourroient s'accoutumer à regarder ces infiniment petits comme des réalités ; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y sont tombés, et qu'elle-même a donné occasion à quelques mauvais livres contre la certitude de la Geométrie (*). La méthode des infiniment petits, n'est autre chose que la méthode des raisons premières et dernières, c'est-à-dire des rapports des limites des quantités finies. (**) Quand on a bien conçu l'esprit et les principes de cette méthode, alors il est utile de la mettre en usage pour parvenir à des solutions élégantes.

De l'équilibre.

45. Si les obstacles que le corps rencontre dans son mouvement n'ont précisément que la résistance nécessaire pour empêcher le corps de se mouvoir, on dit alors qu'il y a équilibre entre le corps et ces obstacles.

THÉORÊME.

46. *Si deux corps dont les vîtesses sont en raison*

(*) L'ouvrage de M. *Mac-Laurin*, qui a pour titre, *A Treatise of fluxions*, a été publié à l'occasion d'un livre anglais intitulé *The Analyst, etc.* contre la certitude des Mathématiques, et dont la plupart des argumens sont contre la méthode des infiniment petits.

(**) Voyez l'*Encyclopédie*, aux mots DIFFÉRENTIEL et FLUXION. La métaphysique du calcul différentiel est expliquée dans le premier de ces articles, d'une manière qui ne doit laisser aucune difficulté.

inverse de leurs masses, ont des directions opposées, de telle manière que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.

PREMIER CAS.

1°. Si les deux corps sont égaux et leurs vîtesses égales, il est évident qu'ils resteront tous deux en repos. Car il n'y a point de raison pourquoi l'un se meuve plutôt que l'autre dans la direction qu'il a; d'ailleurs il est clair par l'article 36, qu'ils ne peuvent se mouvoir dans une direction contraire. Donc, etc.

Je suppose ici, afin que la démonstration ne souffre aucune difficulté, que les deux corps soient non-seulement égaux, mais encore parfaitement semblables, que ce soient par exemple deux globes, deux parallélépipèdes rectangles, etc. Nous verrons plus bas (*art.* 57) la démonstration du même théorême dans le cas où les corps ne sont pas semblables.

SECOND CAS.

Si l'un de ces corps restant dans le même état, on augmente du double la masse de l'autre, et qu'on diminue sa vîtesse de la moitié, il y aura encore équilibre. Car on peut regarder (*art.* 30) la vîtesse du petit corps comme composée de deux vîtesses, égales chacune à la vîtesse du grand; et la masse du grand, comme composée de deux masses égales, animées chacune de la même vitesse. Donc à la place de chacune des masses propo-

sées, on peut imaginer de chaque côté deux masses égales animées de vîtesses égales. Or dans cette dernière hypothèse il y auroit équilibre (*cas* 1). Donc, etc.

On peut encore démontrer cette proposition de la manière suivante. Soit m la masse du petit corps, $2m$ celle du grand, u la vîtesse du grand corps et par conséquent $2u$ celle du petit. Je regarde la masse $2m$ du grand corps comme composée de deux masses m, m', égales chacune à la masse du petit; et au lieu de supposer chacune de ces deux masses m, m', animées de la vîtesse u, je suppose, ce qui revient au même, que la masse antérieure m', celle qui touche le petit corps, soit animée de la vîtesse $2u$ en avant, et de la vîtesse $-u$ en arrière, tandis que la masse postérieure m conserve sa vîtesse u. Il est évident que la masse m' animée de la vîtesse $-u$ doit faire équilibre à la masse égale m animée de la vîtesse u. Donc il ne restera que la masse m' animée de la vîtesse $2u$, laquelle fera équilibre (*cas* 1.) à la masse du petit corps m animée de la vîtesse $2u$.

Dans ce second cas, et dans les deux suivans, ainsi que dans les corollaires qui en seront tirés, je suppose, afin que la démonstration ne souffre aucune difficulté, que les corps soient deux parallélépipèdes rectangles de bases égales et semblables, et de différente longueur, qui se choquent par leurs bases. On verra plus bas (*art.* 57) la démonstration du théorême pour des corps de figure quelconque.

TROISIÈME CAS.

Si les deux masses sont entr'elles comme deux nombres rationnels quelconques ; soient M, m, ces deux masses, V, u, leurs vîtesses, μ la masse qui est la mesure commune des deux masses M, m, v la vîtesse qui est la mesure commune des deux vîtesses V, u; on aura $m = \mu p$, $M = \mu P$; $u = v P$, $V = v p$, P, et p exprimant deux nombres entiers. Cela posé, on prouvera, comme on a fait dans le cas précédent, qu'à chacune des masses animées de sa vîtesse, on peut substituer un nombre $P \times p$ de masses μ animées de la vîtesse v, et qui par conséquent se feront équilibre de part et d'autre. Donc, etc.

Avant que de passer au quatrième cas, nous observerons que dans les trois cas précédens si $MV >$ ou $< mu$, il ne peut y avoir d'équilibre. Car supposons, pour un moment, que les corps M, m, se fassent équilibre en cet état; soient imaginés ces deux corps M, m, sur un plan; et soit supposé que ce plan soit mu en emportant les deux corps avec une vîtesse x qui soit dans le sens de V ou dans un sens contraire, et qui soit telle que $MV \pm Mx = mu \mp mx$; il est visible que les corps M, m, ainsi emportés, se choqueront dans l'espace absolu avec des vîtesses $V \pm x$, $u \mp x$ qui seront en raison inverse de leurs masses, et que par conséquent, suivant ce qui a été démontré ci-dessus, ils doivent rester en repos dans cet espace absolu.

Cependant ils n'y resteroient pas, si comme on le suppose, ils se faisoient équilibre avec les seules vîtesses V et u. Car ces vîtesses V et u étant détruites, par l'hypothèse, à la rencontre des deux corps, il leur resteroit la vîtesse commune x avec laquelle rien ne les empêcheroit de se mouvoir.

Donc si deux masses commensurables quelconques sont en équilibre, et qu'on augmente ou qu'on diminue la vîtesse de l'une d'elles, l'équilibre sera rompu. A plus forte raison le sera-t-il si on augmente ou qu'on diminue à la fois la vîtesse et la masse d'un des corps.

QUATRIÈME CAS.

Supposons enfin que les masses M, m, soient incommensurables, de manière que $m = \mu p$ et $M = \mu P + z$, P et p étant deux membres entiers, et $z < \mu$; je dis que si $m \ast u = M \ast V$, il y aura encore équilibre.

Car supposons qu'il n'y eût point équilibre, et qu'il fallût pour cela ajouter ou retrancher de la masse M une quantité t; la masse $\mu P + z \pm t$ animée de la vîtesse V, seroit donc en équilibre avec la masse m ou μp animée de la vîtesse u. Or la quantité t doit être nécessairement plus petite que μ. Car si elle étoit plus grande, on auroit $\mu P + z + t > \mu P + \mu$. De plus, cette dernière masse $\mu P + \mu$, animée de la vîtesse $\frac{m u}{\mu P + \mu}$, fera équilibre à la masse m animée de la vîtesse u. Or puisque $z < \mu$, on a $\frac{m u}{\mu P + \mu} < \frac{m u}{\mu P + z}$, c'est-à-

dire $< V$. Donc par la remarque qui est à la fin du cas précédent, la masse $\mu P + z + t$ qu'on suppose plus grande que $\mu P + \mu$, étant animée de la vîtesse V plus grande que $\frac{m u}{\mu P + z}$ ne sauroit être en équilibre avec la masse m animée de la vîtesse u. Donc t doit nécessairement être $< \mu$, et comme μ peut être aussi petit qu'on voudra, il s'ensuit que $t = o$. Donc, etc.

Si la quantité t étoit une quantité qu'il fallût retrancher, on auroit en supposant $t > \mu$, $\mu P + z - t < \mu P$ et $V < \frac{m u}{\mu P}$. Donc, etc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Le produit de la masse d'un corps par sa vîtesse est appelé *quantité de mouvement*. De là naît cet axiome, que les corps qui ont des quantités de mouvement égales et directement opposées, se font équilibre.

Remarque.

47. On a démontré à la fin du troisième cas de l'article précédent, que quand les masses M, m sont commensurables, non-seulement il y a équilibre si $MV = mu$, mais qu'il n'y a point équilibre si MV n'est pas égal à mu. Il est aisé d'appliquer la démonstration qu'on en a donnée au cas des masses incommensurables. D'où il résulte que la *loi de l'équilibre est unique*, c'est-à-dire qu'il n'y a point d'équilibre et qu'il ne sauroit y en avoir dans un autre cas que dans celui des masses en raison inverse des vîtesses, lors-

que les corps tendent à se mouvoir dans des directions opposées.

COROLLAIRE I.

48. Si trois corps A, B, C, (*Fig.* 17) sont attachés à une verge indéfinie MN, ou à un fil, et qu'ils reçoivent suivant AM, BM, CN des vîtesses telles que la somme des quantités de mouvement du corps A et du corps B, soit égale à celle du corps C seul, il y aura équilibre. Car on peut (*art.* 30) regarder la vîtesse du corps C comme composée de deux vîtesses quelconques, dont la somme soit égale à la vîtesse totale; et par conséquent on peut considérer dans le corps C deux quantités de mouvement, dont l'une soit égale et contraire à celle de B, l'autre égale et contraire à celle de A. Donc, etc.

Donc en général, quel que soit le nombre des corps, *il y aura équilibre, quand la somme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en un sens, sera égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en sens contraire.*

COROLLAIRE II.

49. Supposons que trois corps B, C, F, (*Fig.* 18) attachés aux fils ou verges AB, AC, AF, soient en équilibre, et qu'on cherche le rapport des quantités de mouvement de ces trois corps entr'elles. On remarquera d'abord que l'action des corps B et C sur le point A est la même, que si ces corps B et C étoient en A; on supposera

supposera que AH et AP soient entr'elles comme les vîtesses des corps B et C; on décomposera chacune de ces vîtesses AH, AP en deux autres AG, AN, et AQ, AL, dont les deux AG, AQ aient des directions contraires, et les deux autres AN, AL soient dirigées suivant FA prolongée.

Maintenant, puisqu'il y a équilibre, il s'ensuit que $B \times AG = C \times AQ$; de plus, la quantité de mouvement du corps F doit être égale à $B \times AN + C \times AL$. Or si par un point quelconque E de la ligne FA prolongée, on tire EK parallèle à AC, et ED parallèle à AB, je dis que les lignes AE, AD, AK seront entr'elles comme les quantités de mouvement des corps F, C, B, c'est-à-dire que $AE : \binom{AK}{AD} :: C \times AL + B \times AN : \binom{B \times AH}{C \times AP}$.

Car $AE : \binom{AK}{AD} :: AO + AM : \binom{AK}{AD} :: \frac{AL \times OD}{PL} + \frac{AN \times KM}{AG} : \left\{\begin{matrix} \frac{AH \times KM}{AG} \\ \frac{AP \times OD}{PL} \end{matrix}\right.$ (à cause de $OD = KM$) $:: \frac{AL}{PL} + \frac{AN}{AG} : \left\{\begin{matrix} \frac{AH}{AG} \\ \frac{AP}{PL} \end{matrix}\right.$ (mettant pour AG et PL leurs proportionnelles C et B) $:: AL \times C + AN \times B : \binom{AH \times B}{AP \times C}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE III.

50. Tout ce que nous venons de dire sur l'équilibre dans les propositions précédentes, sera vrai encore, si

au lieu des vîtesses finies imprimées aux corps qui sont en équilibre ; on leur suppose des forces accélératrices qui soient entr'elles comme étoient ces vîtesses finies, ou, suivant les définitions données (*art.* 22) des forces motrices qui soient entr'elles comme étoient leurs quantités de mouvement. L'équilibre subsistera encore, il ne faudra que se servir, pour la démonstration, du corollaire II, chapitre II, au lieu du corollaire I du même chapitre.

REMARQUE.

Sur l'usage du mot de Puissances *dans la Statique.*

51. Les puissances ou causes qui meuvent les corps, ne peuvent agir les unes sur les autres que par l'entremise des corps mêmes qu'elles tendent à mouvoir. D'où il s'ensuit que l'action mutuelle de ces puissances, n'est autre chose que l'action même des corps animés par les vîtesses qu'elles leur donnent. On ne doit donc entendre par l'action des puissances, et par le terme même de *puissances* dont on se sert communément dans la statique, que le produit d'un corps par sa vîtesse ou par sa force accélératrice. De cette définition, et des articles précédens, on conclut aisément que deux puissances égales et directement opposées se font équilibre ; que deux puissances qui agissent en même sens produisent le même effet que leur somme ; que si trois puissances

agissant sur un point commun sont en équilibre, et qu'on fasse sur les directions de deux de ces puissances un parallélogramme, la diagonale de ce parallélogramme sera dans la direction prolongée de la troisième puissance, et que les rapports des trois puissances seront ceux de la diagonale aux côtés, etc. et plusieurs autres théorêmes semblables que l'on démontre dans la Statique; peut-être avec moins de précision que nous le faisons ici, parce qu'on n'y donne pas communément une notion du mot de *puissance* aussi nette que celle que nous venons de donner.

COROLLAIRE IV.

52. Supposons que deux puissances égales appliquées aux extrémités A, B (*Fig.* 19) d'une verge droite et inflexible AB, agissent en sens contraire dans la direction de cette même verge, et se fasse par conséquent équilibre. Si on imagine une autre verge quelconque ACB, fixe même, si l'on veut, en un point quelconque C, il est évident que l'équilibre subsistera. De plus, si les puissances au lieu de demeurer appliquées en A et en B, étoient appliquées par-tout où l'on voudroit dans AB prolongée vers A et vers B, il est clair que l'équilibre subsisteroit encore. Donc si on suppose la verge AB anéantie, et que la seule verge ACB subsiste, les puissances appliquées en A et en B étant égales et de directions contraires, se feront équilibre.

COROLLAIRE V.

Qui contient le principe du levier.

53. Soient AH et BE les directions de deux puissances en équilibre sur le levier ACB, et que AH et BE soient entr'elles comme ces puissances ; je décompose la puissance AH en deux autres, dont les directions AK et AG prolongées, passent, l'une par B, l'autre par C, et de même la puissance BE en deux autres, dont les directions BP et BF passent par A et par C. En menant les perpendiculaires CM, CV, CL, sur AH, BE, AB, j'ai (12) $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$, et $BP = \frac{BE \times CV}{CL}$. Mais à cause de l'équilibre $AK = PB$. Donc $CM \times AH = BE \times CV$. Donc les puissances AH, BE sont entr'elles en raison inverse des distances de leurs directions au point fixe (13).

---

(12) $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$; en effet les côtés AH, AK du triangle AKH doivent être entr'eux comme les sinus des angles AKH, AHK, ou de leurs égaux CAL, CAM, c'est-à-dire en prenant CA pour rayon, que $AH : AK :: CL : CM$.

(13) L'équation $CM \times AH = BE \times CV$ ou $CM \times AH - BE \times CV = 0$ fait voir que quand deux puissances sont en équilibre sur un levier, si on multiplie chaque puissance par sa distance à l'appui, la différence des produits doit être zéro. En général, pour que tant de puissances qu'on voudra, dirigées dans un même plan, se fassent équilibre, il faut que la somme des produits de chaque puissance par sa distance à l'appui, soit zéro, en prenant avec des signes contraires celles qui

COROLLAIRE VI.

54. Si le point *C* n'étoit pas fixe, alors il faudroit se servir du Corollaire II ci-dessus, pour savoir quelle puissance il faudroit appliquer en *C* pour résister aux

---

agissent dans des sens différens. Quoique cette proposition soit démontrée dans tous les livres de Statique, cependant comme nous en ferons usage par la suite, et que nous voulons épargner au lecteur la peine de recourir ailleurs, nous allons la démontrer ici pour trois puissances seulement, mais de manière à faire voir que la démonstration réussiroit de même pour un plus grand nombre.

Soit le levier $APLE$ (*Fig.* 20) dont l'appui est en L, et aux trois points A, P, E soient appliquées trois puissances représentées par AC, PQ, EH. La force PQ peut se décomposer en deux PV, PR, dont la première passe par l'appui, la seconde par le point E; cette seconde peut se décomposer de nouveaux en deux autres EF, EI, la première couchée sur AE, la seconde dirigée à l'appui.

Les deux forces AC et EH peuvent chacune se décomposer en deux, l'une dirigée à l'appui, l'autre couchée sur la ligne AE. Cela posé, les forces dirigées aux appuis y sont détruites, il faut donc que les forces AD, EF, EK se détruisent entr'elles, c'est-à-dire que $AD = KE - EF$.

Or 1°. $PQ : PR$ ou $EG :: LS : LM$, et $EG : EF :: LT : LS$; donc $PQ : EF :: LT : LM$, et par conséquent $EF = \frac{PQ \times LM}{LT}$;

2°. $AC : AD :: LT : LN$, et $EH : EK :: LT : LO$; donc $AD = \frac{AC \times LN}{LT}$, et $EK = \frac{EH \times LO}{LT}$; donc l'équation $AD = KE - EF$ sera $\frac{AC \times LN}{LT} = \frac{EH \times LO}{LT} - \frac{PQ \times LM}{LT}$, ou $AC \times LN + PQ \times LM - EH \times LO = 0$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

En suivant la même méthode que dans les corollaires V et VI on démontre de même, que les puissances appliquées en A, P, E agissent sur l'appui L, comme si elles étoient immédiatement appliquées à ce point.

puissances AG, BF. Or comme les puissances AG, BF peuvent être regardées comme composées des puissances AH et Ak, BE et Bp, et que les puissances Ak, Bp, sont égales et se détruisent, il s'ensuit que la puissance capable de faire équilibre aux puissances AG, BF, sera la même que celle qu'on trouveroit, si au lieu de ces puissances AG, BF, on imaginoit les puissances AH, BE, appliquées en C avec leurs directions propres,

Remarque sur le cas où le levier est droit.

55. La démonstration précédente du principe du levier, suppose que les lignes AC et CB fassent un angle, et il semble par conséquent qu'elle ne puisse s'appliquer au cas où le levier est droit, et les directions des puissances parallèles. Cependant comme la proposition est vraie, quelque obtus que soit l'angle ACB; il est clair qu'elle doit être vraie encore, lorsque l'angle ACB est de 180 degrés. Voici, au reste, une démonstration plus rigoureuse du cas dont il s'agit.

Soient AP, AR (*Fig.* 21) les bras de levier; PD, RS les directions des deux puissances, que je suppose en équilibre; il est évident, en premier lieu, que si les bras de levier sont égaux, les puissances P, R doivent être égales. Mais si les bras AP, AR sont inégaux, alors ayant tiré à volonté la ligne AS, imaginons que cette ligne soit une verge inflexible, à l'extrémité S de laquelle soient appliquées deux puissances S, S', égales

et opposées, dans la même ligne que la puissance R: supposons de plus, que la seule puissance S' qui tire en en-bas, soit capable de faire équilibre avec la puissance P sur le levier PAS, il est constant que la puissance S opposée à celle-ci, doit faire équilibre à la puissance R, c'est-à-dire (*art.* 52) qu'elle doit lui être égale. Donc $R = S = (art.\ 53)\ \frac{P \times PA}{AR}$. Donc $R : P :: AP : AR$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je ne suis pas le seul qui ait déduit les propriétés du levier droit de celles du levier courbe. M. *Newton* en a usé de la même manière dans ses *Principes*, quoiqu'il ait suivi une route différente de la nôtre, et il y a lieu de croire que ce grand géomètre sentoit la difficulté qu'il y auroit eu à s'y prendre autrement. J'ai tiré les propriétés du levier courbe, de l'équilibre entre deux puissances égales et opposées en ligne droite; mais comme ces deux puissances disparoissent dans le cas du levier droit, la démonstration pour ce cas n'a pu être tirée qu'indirectement du cas général.

On peut démontrer les propriétés du levier droit, dont les puissances sont parallèles, en imaginant toutes ces puissances réduites à une seule, dont la direction passe par le point d'appui : c'est ainsi que M. *Varignon* en a usé dans sa Mécanique. Cette méthode entre plusieurs avantages, a celui de l'élégance et de l'uniformité, mais n'a-t-elle point aussi, comme les autres, le défaut d'être indirecte, et de n'être pas tirée des vrais principes de l'équilibre? Il faut imaginer que les directions des

puissances prolongées concourent à l'infini, les réduire ensuite à une seule par la décomposition, et démontrer que la direction de cette dernière passe par le point d'appui. Doit-on s'y prendre de cette manière pour prouver l'équilibre de deux puissances égales, appliquées suivant des directions parallèles à des bras égaux de levier? Il me semble que cet équilibre est aussi simple et aussi facile à concevoir, que celui de deux puissances opposées en ligne droite, ou d'une puissance retenue par un point fixe, et que nous n'avons aucun moyen direct de réduire l'un à l'autre : or si la méthode de M. *Varignon* pour démontrer l'équilibre du levier est indirecte dans un cas, elle doit l'être aussi nécessairement dans l'application au cas général.

COROLLAIRE VII.

56. Toutes choses demeurant les mêmes que dans la remarque précédente, si on suppose au lieu du point fixe A une puissance qui fasse équilibre aux puissances P et R, il est évident que sa direction sera parallèle et contraire à celle de ces puissances, et qu'elle sera égale à leur somme. Car en supposant qu'elle fasse équilibre aux puissances P, S', elle sera $= P + S'$ (14). Donc, puisque $S' = R$, elle sera aussi $= P + R$, (15).

---

(14) Car par le corollaire VI les puissances appliquées en P et en S' agissent sur le point A comme si elles étoient appliquées en ce point ; or dans ce dernier cas, le point A seroit sollicité avec une force $= P + S'$.

(15) De toute cette théorie du levier, il est facile de conclure, que

REMARQUE.

REMARQUE I.

57. Lorsqu'un corps se meut ou tend à se mouvoir suivant une direction quelconque, on peut imaginer ce corps comme composé d'une infinité de petits parallélépipèdes rectangles d'une égale épaisseur, dont les côtés soient parallèles à la direction du corps; ces parallélépipèdes se mouvront ou tendront à se mouvoir suivant leur longueur avec une vîtesse égale; et par le principe du levier, on pourra toujours réduire le mouvement de ce corps à celui d'un de ces parallélépipèdes, qui auroit une vîtesse égale à la somme des vîtesses de chaque parallélépipède, c'est-à-dire égale à la vîtesse du corps multipliée par le nombre des parallélépipèdes. Par là on voit aisément comment l'équilibre de deux corps se réduit à celui de deux parallélépipèdes à bases égales; et

---

pour réduire à une seule force tant de puissances que l'on voudra, qui agissent suivant des directions parallèles et dans un même plan sur un levier, il suffit de chercher sur ce levier un point tel, qu'en y appliquant parallèlement à toutes ces puissances une force égale à leur somme (si elles tirent toutes dans le même sens) ou égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens sur la somme de celles qui tirent dans l'autre, la somme des produits de chaque puissance par sa distance à un point pris à volonté dans le levier, soit égal au produit de cette puissance totale par sa distance à ce même point.

En général; si tant de puissances parallèles qu'on voudra et perpendiculaires à un même plan sont en équilibre, la somme des produits de ces puissances par leurs distances à un plan quelconque, situé comme on voudra, sera toujours nulle. Ces deux propositions sont aisées à démontrer par le principe du levier, et se trouvent dans beaucoup d'ouvrages.

par conséquent comment le théorême de l'article 46 s'applique à des corps de figure quelconque.

REMARQUE II.

58. Soient deux lignes Ee, Zz, (*Fig.* 22) perpendiculaires l'une à l'autre, et CE' perpendiculaire au plan de ces deux-là; imaginons une puissance G parallèle à Ce, dont la distance au plan $EZze$ soit ξ, et la distance au plan $E'Ce$, χ; une puissance F parallèle à Cz, dont la distance au plan $EZze$ soit ζ, et la distance au plan $E'Cz$, θ; enfin une puissance Π parallèle à CE' dont la distance au plan $E'Ce$ soit μ, et la distance au plan $E'Cz$, ν: on peut réduire l'action de ces puissances à celle de trois autres; la première sera égale et parallèle à la puissance G, et agira (*Fig.* 23) sur un point Z' du plan $E'Cz$, tel que menant $Z'L$ parallèle à CE', on ait $Z'L = \xi - \frac{\Pi'}{G}$, et que $Z'L'$ parallèle à CZ soit égale à $\frac{F'}{G} - \chi$; la seconde puissance sera dirigée suivant LZ' parallèlement à CE' dans le plan $E'CZ$, et sera $= \Pi$; la troisième sera dirigée parallèlement à Zz dans le même plan $E'CZ$, sera égale à F, et agira à une distance de Zz qu'on trouvera facilement. Ces propositions peuvent se démontrer aisément par les articles 20, 21, 22 de mes *Recherches sur la précession des Équinoxes* (16).

(16) Que la puissance G (*Fig.* 22) rencontre le plan $E'Cz$ au point

Ce principe sert à trouver la loi d'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent dans des plans et dans des directions quelconques. On décomposera,

---

Q, la puissance F le plan $E'Ce$ au point G, et soient tirées QP', QD parallèles à CE', Cz; GE', GR' parallèles à Ce, CE', et enfin CQ qui rencontre en F la ligne $E'F$ parallèle à Cz. Au lieu de la puissance G, qui agit au point Q, on peut prendre deux puissances qui agissent l'une en C, l'autre en F, parallèlement à la puissance G, dont la somme soit $= G$, et qui soient entr'elles en raison de FQ à CQ, ou, ce qui revient au même, qui soient à la puissance G, comme FQ et CQ sont à CF, ou comme DE' et CD sont à CE'; ainsi la puissance qui agit en C sera $G - \frac{G\xi}{\zeta}$, et celle qui agit en F sera $\frac{G\xi}{\zeta}$; mais cette dernière rencontrant nécessairement en quelque point K la puissance F dirigée suivant GK, il naît du concours de ces deux forces une force dirigée suivant Kn, qui prolongée rencontre en N le plan $E'CZ$, et peut être censée agir au point N: or il est visible en tirant NO', parallèle à FK, que le point N est sollicité de la même manière que si on lui appliquoit, suivant NF et NO', les forces qui agissoient tout-à-l'heure suivant GK et FK: nos deux forces sont réduites à trois, dont l'une $= F$ agit suivant NF, la seconde $= G - \frac{G\xi}{\zeta}$ agit suivant Ce, la troisième $= \frac{G\xi}{\zeta}$ agit suivant NO' parallèle à Ce; mais ces deux dernières peuvent, comme on l'a vu, se réduire à une seule égale à leur somme, et par conséquent $= G$, qui passera par B, où QD rencontre CN: car $CB : BN :: CQ : QF :: \frac{G\xi}{\zeta} : G - \frac{G\xi}{\zeta}$, c'est-à-dire en raison inverse des puissances appliquées en C et N. De plus, les deux forces suivant FK et GK, ayant produit une force dirigée suivant NKn, il est visible que si on représente la première par FK, la seconde doit être représentée par FN, et qu'ainsi on a $F : \frac{G\xi}{\zeta} :: FN : FK$ ou GE' ou θ; donc $FN = \frac{F\theta\zeta}{G\xi}$;

ce qui est toujours possible, chacune de ces puissances en trois autres, parallèles aux lignes Ce, Cz, CE'; on nommera ces puissances G, F, Π, et il faudra pour

---

d'ailleurs les triangles CDQ, $CE'F$ donnent $E'F = \frac{\chi\zeta}{\xi}$, et par conséquent $NE' = \frac{F\theta\zeta}{G\xi} - \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc $BD = \frac{F\theta}{G} - \chi$; donc les deux forces G et F sont réduites à deux autres, qui sont aussi G et F, dont la première agit en B parallèlement à Ce à une distance de $CE' = \frac{F\theta}{G} - \chi$, et l'autre agit suivant NF dans le plan $E'Cz$ à la distance CE'.

Maintenant (*Fig.* 23) que V soit le point où la puissance Π rencontre le plan eCz. Soit tirée par le point B, où est actuellement appliquée la puissance G, la ligne BL parallèle à CE', on aura $BL = \xi$; soit tirée ensuite LV; la puissance appliquée en B peut se décomposer en deux, l'une suivant BT prolongement de BD, l'autre suivant BK parallèle à LV, et qui rencontrera par conséquent la direction VO de la puissance Π. Ayant tiré VR parallèle à Ce, les triangles semblables LRV, SBK donneront SK ou la force suivant $BT = \frac{G \times LR}{RV}$, et la force suivant $BK = \frac{G \times LV}{RV}$; mais cette dernière, par son concours avec la force Π dirigée suivant VO, produit une force dont la direction prolongée OZ' rencontre BL en quelque point Z', et qu'on peut par conséquent imaginer appliquée à ce point Z': or si on représente la force suivant BK par BO, la force suivant VO doit être représentée par $Z'B$, ensorte que $BZ' : BO :: \Pi : \frac{G \times LV}{RV}$; donc (à cause de $BO = LV$) on a $BZ' = \frac{\Pi \times RV}{G}$.

Mais au lieu de la force suivant $Z'O$, on peut imaginer au point Z' les forces BO et $Z'B$ appliquées suivant des directions parallèles à BK et VO, ensorte que la force $Z'B$, ou Π agira suivant $Z'B$, et la force BO suivant $Z'Q$ parallèle à LV; or cette dernière peut se décomposer

l'équilibre; 1°. s'il n'y a point de point fixe, que $\int G = 0$, $\int F = 0$, $\int \Pi = 0$; et que de plus $\int F\zeta - \Pi\mu = 0$, $\int G\xi - \Pi\nu = 0$, $\int F\theta - G\chi = 0$. 2°. S'il y a un point fixe, et que ce point fixe soit C (ce qu'on peut toujours supposer) il faudra seulement que les trois dernières équations aient lieu chacune en particulier.

Pour démontrer ces trois dernières équations, les seules qui en aient besoin, on considérera que les puissances G étant perpendiculaires au plan $E'Zz$,

---

en deux autres, l'une suivant $Z'M$ parallèle à Ce, et l'autre suivant $Z'N$ parallèle à Cz; et par la comparaison des triangles semblables $Z'NQ$, LRV on trouvera la force suivant $Z'M = G$, et la force suivant $Z'N = \frac{G \times LR}{RV}$. Voilà donc nos trois forces réduites à cinq, la première $= G$ qui agit en Z' perpendiculairement au plan $E'CZ$ à une distance $Z'L$ de $CZ = BL - BZ' = \xi - \frac{\Pi\nu}{G}$; la seconde $= \frac{G \times LR}{RV}$, qu'on peut considérer comme appliquée en Z' et agissant suivant $Z'L'$; la troisième $= \frac{G \times LR}{RV}$ qu'on peut considérer comme appliquée en D et agissant suivant DB; la quatrième $= F$, qui agit suivant $E'F$; la cinquième enfin $= \Pi$, qui agit suivant $Z'B$ ou LB, à la distance $CL = BB = \frac{F\theta}{G} - \chi$; mais les forces appliquées en L', D, E' étant parallèles se réduisent à une seule $= \frac{G \times LR}{RV} - \frac{G \times LR}{RV} + F$, c'est-à-dire $= F$, et dont la distance CX à C doit être telle que $\frac{G \times LR}{RV} \times CL' - \frac{G \times LR}{RV} \times CD + F \times CE' = F \times CX$; d'où l'on tire $CX = \zeta - \frac{\Pi}{F}\left(\mu + \frac{F\theta}{G} - \chi\right)$.

et les autres puissances étant dans ce même plan les puissances G doivent seules et indépendamment des autres être en équilibre; donc non-seulement la somme de ces puissances doit être $= 0$, mais encore la somme de leurs moments par rapport aux lignes CL, CL'. Donc $\int G \times (\xi - \frac{\Pi \nu}{G}) = 0$, et $\int G (\frac{F\theta}{G} - \chi) = 0$. Donc $\int G\xi - \Pi\nu = 0$, et $\int F\theta - G\chi = 0$. De même, en rapportant la puissance F perpendiculairement au plan $E'Ce$, comme on a rapporté la puissance G perpendiculairement au plan $E'Zz$, on trouvera $\int F\zeta - \Pi\mu = 0$, $\int G\chi - F\theta = 0$; et pour la puissance Π, rapportée perpendiculairement au plan Zez, on aura $\int \Pi\nu - G\xi = 0$, $\int F\zeta - \Pi\mu = 0$. Or ces six équations se réduisent aux trois que nous avons données.

Il est bon de remarquer que les équations $\int G = 0$, $\int G (\xi - \frac{\Pi\nu}{G}) = 0$, et $\int G (\frac{F\theta}{G} - \chi) = 0$, sont chacunes nécessaires pour qu'il y ait équilibre. Car soient par exemple trois puissances A, B, G, (*Fig.* 24) en équilibre et perpendiculaires au plan LCL'; il faut pour l'équilibre 1°. Que $A + B + G = 0$. 2°. Que les points A, B, G, soient en ligne droite, ce qui donne les deux équations $A \times AD + B \times BE + G \times GF = 0$, et $A \times AK + B \times BM + G \times GO = 0$. Si les points A, B, G n'étoient pas en ligne droite, que le point B, par exemple, fût en Q dans le prolongement de BE, la seconde équation auroit lieu, mais non la première; et il n'y auroit point équilibre.

REMARQUE III.

59. Je ne m'étendrai pas davantage sur les loix de l'équilibre dans cette première partie. J'aurai occasion d'en parler encore dans la seconde partie de cet ouvrage. La loi générale de l'équilibre est que les puissances soient entr'elles réciproquement comme les vîtesses, estimées suivant la direction de ces puissances. C'est de cette loi générale, dont M. *Newton* fait mention en peu de mots au commencement de ses *Principes*, que dépend la démonstration de la conservation des forces vives, comme on le verra dans la seconde partie de cet ouvrage.

Pour ce qui concerne le détail des différentes machines dont on fait mention d'ordinaire dans la Statique, comme la poulie, le treuil, etc. je me contente, n'ayant là-dessus rien de nouveau à dire, de renvoyer mes lecteurs aux livres qui en traitent, et particuliérement à la Mécanique de M. *Camus*, de l'académie royale des sciences, publiée il y a quelques années, et à l'ouvrage de M. *Trabaud*, qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement et l'Équilibre;* ouvrages où cette matière est traitée avec exactitude et avec clarté.

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, avec plusieurs applications de ce principe (*).

CHAPITRE PREMIER.

Exposition du principe.

Les corps n'agissent les uns sur les autres que de trois manières différentes qui nous soient connues: ou par impulsion immédiate, comme dans le choc ordinaire; ou par le moyen de quelque corps interposé entr'eux, et auquel ils sont attachés; ou enfin par une vertu d'attraction réciproque, comme font dans le système

(*) Ce principe, et la plupart des problèmes suivans, étoient contenus dans un mémoire que j'ai lu à l'académie sur la fin de 1742, quoique la première édition de ce Traité n'ait paru qu'en 1743. Le même jour où je commençai la lecture de mon mémoire, M. Clairaut en présenta un qui avoit pour titre: *Sur quelques Principes qui facilitent la solution d'un grand nombre de Problêmes de Dynamique.* Ce mémoire imprimé dans le volume de 1742, a été lu après le mien, avec lequel il n'a d'ailleurs rien de commun.

Newtonien

Newtonien le soleil et les planètes. Les effets de cette dernière espèce d'action ayant été suffisamment examinés, je me bornerai à traiter ici du mouvement des corps qui se choquent d'une manière quelconque, ou de ceux qui se tirent par des fils ou des verges inflexibles. Je m'arrêterai d'autant plus volontiers sur ce sujet, que les plus grands géomètres n'ont résolu jusqu'à présent (en 1742) qu'un petit nombre de problêmes de ce genre, et que j'espère, par la méthode générale que je vais donner, mettre tous ceux qui sont au fait du calcul et des principes de la mécanique, en état de résoudre les plus difficiles problêmes de cette espèce.

DÉFINITION.

J'appellerai dans la suite *Mouvement* d'un corps, la vîtesse de ce même corps considérée en ayant égard à sa direction; et par *quantité de mouvement*, j'entendrai à l'ordinaire le produit de la masse par la vîtesse.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

60. *Soit donné un systême de corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque; et supposons qu'on imprime à chacun de ces corps un mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres corps; trouver le mouvement que chaque corps doit prendre.*

SOLUTION.

Soient $A, B, C,$ etc. les corps qui composent le

4. p. XII ⇒ p. 45.

système, et supposons qu'on leur ait imprimé les mouvemens a, b, c, etc. qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvemens a, b, c, etc. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement a imprimé au corps A comme composé du mouvement a, qu'il a pris, et d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvemens $b, c,$ etc. comme composés des mouvemens b, ϵ; c, $\varkappa$; etc. d'où il s'ensuit que le mouvement des corps $A, B, C,$ etc. entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions a, b, c, on leur eût donné à-la-fois les doubles impulsions a, α; b, ϵ; c, $\varkappa$, etc. Or par la supposition, les corps $A, B, C,$ etc. ont pris d'eux-mêmes les mouvemens a, b, c; etc. donc les mouvemens $\alpha, \epsilon, \varkappa$, etc. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvemens a, b, c, etc. c'est-à-dire que, si les corps n'avoient reçu que les mouvemens $\alpha, \epsilon, \varkappa$, etc. ces mouvemens auroient dû se détruire mutuellement, et le système demeurer en repos.

De là résulte le principe suivant, pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres. *Décomposez les mouvemens $a, b, c,$* etc. *imprimés à chaque corps, chacun en deux autres* a, α; b, ϵ; c, $\varkappa$, etc. *qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens* a, b, c, etc. *ils eussent pu conserver ces mouvemens sans se nuire réciproquement; et que si on ne leur eût imprimé que les mouvemens $\alpha, \epsilon, \varkappa$,* etc. *le système fût demeuré en repos;* il est clair que a, b, c

seront les mouvemens que ces corps prendront en vertu de leur action. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE.

61. Lorsqu'un des mouvemens imprimés est = o, il est visible que les mouvemens dans lesquels on le décompose sont des mouvemens égaux et contraires. Par exemple si a est = o, on aura le mouvement α = et de direction contraire au mouvement a : en effet, a est dans tous les cas la diagonale d'un parallélogramme dont a et α sont les côtés; or quand la diagonale est = o, les côtés sont égaux et directement opposés. Donc, etc.

CHAPITRE II.

Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs corps, déduites du principe précédent.

DÉFINITION I.

J'APPELLERAI dans la suite *centre de gravité* de deux corps, un point pris dans la ligne droite qui joint ces corps, et dont les distances à chacun de ces corps, soient en raison inverse de leurs masses; et en général, j'entendrai toujours par le mot de *centre de gravité de plusieurs corps*, ce qu'on entend d'ordinaire par ce mot en mécanique, c'est-à-dire un point tel, que si on fait

passer par ce point un plan de position quelconque, la somme des produits des masses qui se trouveront d'un côté de ce plan, multipliées chacune par sa distance à ce même plan, soit égale à la somme des produits des masses qui se trouveront de l'autre côté, multipliées de même chacune par sa distance au plan.

SCOLIE.

62. Lorsque les pesanteurs des corps sont comme leurs masses, le centre de gravité, tel que nous venons de le définir, est aussi le point par lequel le système devroit être suspendu pour rester en équilibre, si tous les corps étoient unis l'un à l'autre par des leviers inflexibles. Il n'en est pas de même, lorsque les forces motrices ou pesanteurs des corps ne sont pas comme leurs masses. Ce que nous appellons ici *centre de gravité*, devroit plutôt s'appeler alors *centre de masses* (*). Nous nous servirons cependant du terme de *centre de gravité*, pour nous conformer à l'usage reçu.

DÉFINITION II.

Lorsque plusieurs puissances agissent ensemble, j'appellerai *force résultante du concours d'action de ces puissances*, ou simplement *force résultante de ces puissances*, une puissance égale et directement opposée à celle qui seroit capable de leur faire équilibre.

(*) Ce terme de *centre de masses* a été employé par M. *Daniel Bernoulli*; Traité du flux et reflux, Chap. III, §. III.

Ainsi, par exemple, si AM (*Fig.* 21) est la direction de la puissance qui fait équilibre aux puissances P, R sur le levier PAR, AN sera la direction de la force résultante des puissances P, R, et cette force résultante sera égale à la force suivant AM.

COROLLAIRE.

63. Si plusieurs puissances se font équilibre d'une manière quelconque, la force résultante sera nulle, s'il n'y a pas de point fixe ; et, s'il y en a un, la direction de la force résultante passera par le point fixe.

Car *dans le premier cas*, puisque toutes les puissances se font équilibre par elles-mêmes les unes aux autres, la puissance capable de faire seule équilibre à toutes ces puissances est donc zéro, et par conséquent aussi (*déf. précéd.*) la force résultante.

Dans le second cas, il est visible que le point fixe fait l'effet d'une puissance qui soutient l'effort de toutes les autres ; donc si on détruit le point fixe, et qu'on cherche une puissance capable de faire équilibre à toutes les puissances données, la direction de cette puissance passera nécessairement par le point fixe. Donc la direction de la force résultante y passera aussi.

J'entends au reste ici, et j'entendrai dans les Lemmes suivans par le mot de point fixe, *non-seulement un point mathématique* (*comme l'appui d'un levier, le point de suspension d'une verge ou d'un fil*), *mais en général tout obstacle insurmontable, qui par sa résistance soit ca-*

pable de détruire l'effet commun des puissances et de produire l'équilibre entr'elles.

LEMME I.

64. *Si tant de corps qu'on voudra se meuvent uniformément suivant des directions parallèles, dans le même plan ou dans des plans différens, la direction de leur centre de gravité commun sera parallèle aux directions de ces corps, et sa vîtesse sera égale à la somme des quantités de mouvement de chaque corps, divisée par la somme des masses.* Cette proposition est démontrée dans plusieurs ouvrages, et elle se déduit fort aisément du principe du levier.

LEMME II.

65. *Soient sur un même plan trois corps* A, *a*, *α*, (Fig. 25) *ou en général tant de corps qu'on voudra, et* G *leur centre de gravité. Soit* G M *la ligne droite parcourue par le centre de gravité de ces corps, dans le tems qu'ils parcourent uniformément les lignes quelconques* A C, *a* c, *α x. Je dis, que si on décompose les vîtesses* A C, *a* c, *α x, chacune en deux autres* A B, A D; *a* b, *a* d; *α* 6, *α* δ, *telles que les lignes* A B, *a* b, *α* 6 *soient parallèles entr'elles aussi bien que les lignes* B C, b c, 6 *x; et qu'on cherche la ligne* G N *que parcourroit le centre de gravité* G, *si les corps* A, *a*, *α*, *avoient les vîtesses et les directions* A B, *ab*, *α* 6, *et de même la ligne* G O *que parcourroit ce même centre, si les corps* A, *a*, *α*, *avoient les*

vîtesses et les directions A D, *a* d, *α δ*: *la diagonale du parallélogramme fait sur les lignes* G N, G O, *sera la ligne même* G M *que parcourt le centre, lorsque les corps* A, *a*, *α*, *ont les vitesses et les directions* A C, *a* c, *α κ*.

Car supposons que lorsque les corps *A*, *a*, *α*, sont parvenus en *B*, *b*, *ϛ*, et que par conséquent (*hyp.*) le centre *G* est en *N*, on leur donne suivant *B C*, *b c*, *ϛ κ*, des vîtesses égales et parallèles aux vîtesses suivant *A D*, *a d*, *α δ*; il est clair qu'ils arriveront aux points *C*, *c*, *κ* des lignes *A C*, *a c*, *α κ*. Or, par la supposition, lorsque les corps *A*, *a*, *α* sont en *C*, *c*, *κ*, le centre *G* est en *M*; donc tandis que les corps *A*, *a*, *α*, parcourent les lignes *B C*, *b c*, *ϛ κ*, le centre de gravité parcourra la ligne *N M*. Cette ligne *N M* sera (*Lem. I.*) parallèle aux lignes *B C*, *b c*, *ϛ κ*, et $= -\frac{A.BC+a.bc+\alpha.\varsigma\kappa}{A+a+\alpha}-$. Mais la ligne *G O* que parcourroit le centre de gravité *G* tandis que les corps *A*, *a*, *α*, décriroient les lignes *A D*, *a d*, *α δ*, parallèles et égales à *B C*, *b c*, *ϛ κ*, cette ligne *G O*, dis-je, seroit parallèle aux lignes *A D*, *a d*, *α δ*, et seroit $= \frac{A.AD+a.ad+\alpha.\alpha\delta}{A+a+\alpha} = \frac{A.BC+a.bc+\alpha.\varsigma\kappa}{A+a+\alpha} = NM.$ Donc la ligne *G O* est égale et parallèle à *N M*: donc *M G* est la diagonale du parallélogramme fait sur les côtés *N G*, *G O*. *Ce qu'il falloit faire.*

SCOLIE.

66. Il est visible que cette démonstration peut s'éten-

dre à tel nombre de corps qu'on voudra, et qu'ainsi la proposition est générale.

LEMME III.

67. *Si* GM (Fig. 25 et 26) *est la ligne parcourue par le centre de gravité* G *des corps* A, *a*, α, *tandis que ces corps décrivent uniformément les lignes quelconques* AC, *a* c, αx; *et qu'ayant transporté ces corps en d'autres endroits* F, f, φ *du même plan, de manière qu'ils soient disposés l'un par rapport à l'autre comme on voudra, et que* γ *soit leur centre de gravité, on suppose qu'ils décrivent les lignes* FH, fh, $\varphi\pi$, *égales et parallèles à* AC, ac, αx, *chacune à sa correspondante : je dis que la ligne* $\gamma\mu$ *décrite par le centre de gravité, sera égale et parallèle à* GM.

Car soient $FL, fl, \varphi\lambda$ égales et parallèles à AB, ab, $\alpha\mathfrak{b}$; $FP, fp, \varphi\pi$, égales et parallèles à AD, ad, $\alpha\delta$, chacune à sa correspondante; $\gamma\nu$ le chemin du centre γ, lorsque les corps décrivent les lignes $FL, fl, \varphi\lambda$; $\gamma\omega$, le chemin du même centre, lorsqu'ils décrivent $FP, fp, \varphi\pi$. Il est clair que $\gamma\nu$ sera égale et parallèle à GN, et $\gamma\omega$ égale et parallèle à GO. Donc $\gamma\mu$ sera aussi égale et parallèle à GM: mais (*Lem. précéd.*) ces deux lignes sont celles que décrivent les centres de gravité G, γ, quand les corps A, a, α et F, f, φ parcourent les lignes $AC, ac, \alpha x$, et FH, $fh, \varphi\pi$. Donc, etc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME

LEMME IV.

68. *Les mêmes choses étant supposées que dans le* Lem. II *ci-dessus, avec cette différence que* AB, *a*b, *α*ϐ, *et* AD, *a* d, *α* δ, (Fig. 27) *ne soient point parallèles : si* GM *est le chemin du centre de gravité, lorsque les corps* A, *a*, *α*, *décrivent uniformément les lignes* AC, *a*c, *α*κ; GN *le chemin de ce même centre, lorsque ces corps décrivent les lignes* AB, *a*b, *α*ϐ; *et* GO *le chemin du centre, lorsque les corps* A, *a*, *α*, *décrivent les lignes* AD, *a* d, *α*δ; *je dis que* GM *sera la diagonale du parallélogramme fait sur les côtés* GN, GO.

Car l'on prouvera comme dans le *Lem. II.* que *NM* est le chemin du centre, lorsque les corps *A*, *a*, *α*, décrivent les lignes *B C*, *b c*, ϐ κ. Mais à cause que *A D a d*, *α* δ sont égales et parallèles à *B C*, *b c*, ϐ κ, chacune à chacune; il s'ensuit (*Lem. III.*) que *G O* est égale et parallèle à *N M*. Donc etc.

COROLLAIRE I.

69. Si on avoit décomposé les mouvemens *A C*, *a c*, *α* κ chacun en trois autres quelconques, ou en général en tant d'autres qu'on eût voulu, le chemin *G M* du centre de gravité auroit toujours été la dernière diagonale des parallélogrammes, qui auroient eu pour côtés les lignes particulières que le centre de gravité auroit parcourues, si les corps *A*, *a*, *α*, avoient eu séparément

et successivement chacun des mouvemens composans. Cela est clair par le Lemme précédent.

COROLLAIRE II.

70. La même proposition seroit encore vraie, si les mouvemens composans n'étoient pas en nombre égal dans tous les corps ; par exemple, si le mouvement de l'un étoit décomposé en trois, le mouvement d'un autre en deux, etc. Car le Lemme précédent n'en seroit pas moins véritable, quand on supposeroit par exemple $AD = 0$, c'est-à-dire, que le mouvement AC n'eût point été décomposé.

LEMME V.

71. *Si tant de corps* A, B, C, etc. *qu'on voudra sont liés ou joints ensemble d'une manière quelconque, sans néanmoins qu'il y ait dans le système aucun point fixe ; et qu'on leur imprime les mouvemens* M, N, P, etc. *tels qu'en vertu de ces mouvemens ils soient en équilibre ; je dis que si les corps* A, B, C, etc. *pouvoient suivre librement les mouvemens* M, N, P, etc. *le centre de gravité demeureroit en repos.*

Car si on décompose les mouvemens M, N, P, *etc.* chacun en deux autres m, μ; n, ν; p, π; *etc.* parallèles à deux lignes données de position quelconque, que j'appelle K et Q ; il faudra pour trouver le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens M, N, P, *etc.* chercher le chemin de ce même centre en vertu des

mouvemens m, n, p, *etc.* qui sera (*Lem. I.*) parallèle à K, et $= \frac{A.m + B.n + C.p + etc.}{A + B + C. etc.}$; et le chemin, de ce même centre en vertu des mouvemens μ, ν, π etc. qui sera parallèle à Q, et $= \frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + etc.}{A + B + C\ etc.}$. La diagonale du parallélogramme fait sur ces deux lignes, sera (*Lem. II.*) le chemin du centre de gravité. Il faut donc prouver que chacune de ces deux lignes sera zéro, pour faire voir que le chemin du centre de gravité est $= 0$, ou, ce qui est la même chose, il faut démontrer que $A.m + B.n + C.p + etc. = 0$, et $A.\mu + B.\nu + C.\pi + etc. = 0$.

Or puisque (*hyp.*) les corps A, B, C, *etc.* animés des mouvemens M, N, P, *etc.* sont en équilibre, et qu'il n'y a dans le système aucun point fixe, la force résultante des puissances $A.M, B.N, C.P$ *etc.* sera $= 0$ (*art.* 63). Or comme les puissances $A.M, B.N, C.P$ *etc.* se décomposent dans les puissances $A.m$, $A.\mu$; $B.n$, $B.\nu$; $C.p$, $C.\pi$; *etc.* la force résultante de ces puissances est celle qui provient de la force résultante des puissances $A.m, B.n, C.p$ *etc.* et de la force résultante des puissances $A.\mu, B.\nu, C.\pi$ *etc.* Mais ces deux dernières forces résultantes sont parallèles à deux lignes différentes K et Q. Donc pour que la force qui en provient soit zéro, chacune en particulier doit être $= 0$. Or la première est $A.m + B.n + C.p + etc.$ la seconde $A.\mu + B.\nu + C.\pi + etc.$ Donc cha-

cune de ces deux quantités est = o. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME VI.

72. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Corollaire précédent, si ce n'est que les mouvemens* M, N, P, etc. *soient quelconques, c'est-à-dire, tels que les corps* A, B, C, etc. *animés de ces mouvemens, se fassent équilibre ou non, et qu'il y ait de plus, si l'on veut, un point fixe dans le système : je dis que si l'on supposoit que les corps* A, B, C, etc. *suivissent les mouvemens* M, N, P, etc. *abstraction faite de leur action mutuelle, le chemin du centre de gravité seroit parallèle à la direction de la force résultante des puissances* A. M, B. N, C. P; etc.

Car pour avoir la direction de cette force, il faut (les mêmes choses étant posées que dans la démonstration du Lemme précédent) tirer la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K et à Q, soient entr'eux comme $A.\ m + B.\ n + C.\ p + etc.$ à $A.\ \mu + B.\ \nu + C.\ \pi + etc.$ Mais pour avoir le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens M, N, P, *etc.* il faut (*Lem. II.*) tirer la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K et à Q, soient entr'eux comme $\frac{A.\ m + B.\ n + C.\ p + etc.}{A + B + C + etc.}$ à $\frac{A.\ \mu + B.\ \nu + C.\ \pi + etc.}{A + B + C + etc.}$; donc les côtés de ces deux parallélogrammes seront parallèles chacun à son corres-

pondant, et seront l'un à l'autre dans le même rapport. Donc les diagonales seront parallèles. Donc etc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

73. Si les corps A, B, C, *etc.* avoient les mouvemens $-M$, $-N$, $-P$, *etc.* le chemin du centre de gravité seroit parallèle à la direction de la force résultante, mais en sens contraire.

SCOLIE I.

74. Tous les Lemmes démontrés ci-dessus sont encore vrais, lorsque les corps sont supposés dans des plans différens. Car 1°. le Lemme I. est vrai dans ce cas comme dans les autres. 2°. La démonstration du Lemme II. ne suppose pas à la rigueur que les corps A, a, α, soient dans le même plan; elle suppose seulement que les mouvemens AC, ac, $\alpha\varkappa$ puissent se décomposer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données. D'où il s'ensuit que le Lemme III. sera vrai, lors même que les corps sont dans des plans différens, au moins dans la supposition que les mouvemens imprimés à chaque corps puissent se décomposer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données de position. Or lorsque les corps sont dans des plans différens, on peut décomposer les mouvemens imprimés, chacun en deux autres, dont l'un soit parallèle à une ligne donnée de position, et dont le second puisse aussi se décomposer en deux autres paral-

lèles chacun à deux autres lignes données de position. D'où il s'ensuit que le Lemme III. est vrai dans tous les cas, et qu'ainsi les Lemmes IV. V. et VI. qui ne sont appuyés que sur les trois premiers, et qui ne demandent point que les corps soient dans un même plan, sont aussi vrais dans tous les cas.

Au reste, nous avons supposé dans les Lemmes précédens, la proposition démontrée par M. *Newton*, que le centre de gravité de plusieurs corps qui se meuvent uniformément et en ligne droite, sans agir les uns sur les autres, se meut aussi uniformément et en ligne droite. Cependant il est facile de voir que par la Méthode de la décomposition des mouvemens en d'autres, parallèles à des lignes données, on pourroit aussi démontrer très-facilement cette proposition. Ainsi notre Méthode a cet avantage, qu'on peut s'en servir pour démontrer que le centre de gravité de plusieurs corps, se meut uniformément et en ligne droite, soit que ces corps agissent, soit qu'ils n'agissent pas les uns sur les autres.

SCOLIE II.

75. Ajoutons que si plusieurs corps, considérés comme des points, se meuvent en ligne droite, dans un milieu résistant en raison de la vîtesse, leur centre de gravité se mouvra aussi en ligne droite, avec un mouvement retardé en raison de la vîtesse. En effet quand la résistance est comme la vîtesse, les espaces que les corps décriroient à chaque instant, sont diminués dans

la raison de ces mêmes espaces. Donc le chemin du centre de gravité continue d'être en ligne droite, et l'espace qu'il parcourt est seulement diminué à chaque instant d'une quantité qui lui est proportionnelle. Donc etc.

THÉORÊME I.

76. *L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs corps, ne change point par l'action mutuelle de ces corps entr'eux, pourvu que le système soit entièrement libre, c'est-à-dire, qu'il ne soit point assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe.*

Car (*art.* 60) les mouvemens *a, b, c etc.* étant composés des mouvemens a, α; b, β; c, $\varkappa$; etc. les mouvemens a, b, c, etc. peuvent être regardés comme composés des mouvemens $a, -\alpha$; $b, -\beta$; $c, -\varkappa$; *etc*; d'où il s'ensuit que le chemin du centre de gravité, quand les corps sont animés des mouvemens a, b, c, etc. est le même (*Lem. IV.*) que si on les supposoit animés d'abord des mouvemens *a, b, c, etc.* et ensuite des mouvemens $-\alpha, -\beta, -\varkappa$ *etc.* Or puisque par l'hypothèse, il n'y a dans le système aucun point fixe, et que le système demeureroit en repos, si les corps n'avoient reçu que les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa$, *etc.* Il s'ensuit (*Lem. V.* et *Coroll. Lem. VI.*) qu'en vertu des mouvemens $-\alpha, -\beta, -\varkappa$, *etc.* le chemin du centre de gravité est zéro. Donc le chemin du centre de gravité est le même quand les corps ont les mouvemens a, b, c, etc. que s'ils suivoient les mouvemens *a, b, c, etc.* qu'on leur a imprimés.

Remarque.

77. S'il y a dans le système quelque point fixe, alors les corps animés des mouvemens α, ζ, $\varkappa$, *etc.* peuvent se faire équilibre, sans que la force résultante de ces mouvemens soit zéro : il suffit que la direction de la force résultante de ces mouvemens passe par le point fixe. Dans ce cas, le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens $-\alpha$, $-\zeta$, $-\varkappa$ *etc.* sera (*Coroll. Lem. VI.*) parallèle à la direction de cette force et en sens contraire, et par conséquent ne sera point $=0$. Donc alors l'action mutuelle des corps changera l'état du centre de gravité.

THÉORÊME. II

78. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Théorême I., si la pesanteur ou une force accélératrice, constante pour chaque corps, et différente, si l'on veut, pour chacun d'eux, agit sur ces corps suivant des lignes parallèles, le centre de gravité ou plutôt le centre de masses commun décrira la même courbe qu'il auroit décrite, si ces corps eussent été libres.*

Pour le démontrer, ne prenons que deux corps A, B, (Fig. 28) et supposons que $A\alpha$, $B\zeta$, soient les petites lignes qu'ils parcourroient naturellement en vertu des vîtesses primitivement imprimées Aa, Bb, et de la force accélératrice suivant $a\alpha$, $b\zeta$; soit C le centre de masses des corps A et B, c'est-à-dire, un point dont les distances

distances aux points A et B soient en raison inverse des masses A et B, (et non pas des poids A et B qui peuvent ici n'être pas comme les masses); et que les corps A et B, au lieu de parcourir les lignes $A\,\alpha$, $B\,6$, parcourent les lignes A a, B b; il est clair (*art.* 76) que le chemin Cx du centre de gravité au premier instant, sera le même que si les corps A et B eussent décrit les lignes $A\,\alpha$, $B\,6$. Dans l'instant suivant, les corps tendent à décrire $a\,s = A\,a$, et $b\,\delta = B\,b$, et le centre C tend à parcourir la droite $x\,K = Cx$, la même qu'il eût parcourue, si les corps eussent continué à se mouvoir suivant $A\,\alpha$, $B\,6$; mais, comme, en vertu de la force accélératrice, les corps A et B, décriroient les lignes parallèles $e\,f$, $d\,g$ dans ce dernier cas, et dans l'autre cas les lignes $s\,\varphi$, $\delta\,\gamma$ qui leur sont égales et parallèles chacune à chacune, il s'ensuit que le chemin $x\,k$ du centre de masses sera le même, soit que les corps décrivent αf, $6 g$, soit qu'ils décrivent les lignes $a\,\varphi$, $b\,\gamma$. Mais quelque autre ligne que les corps A, B parcourent au lieu de $a\,\varphi$, $b\,\gamma$, à cause de leur action mutuelle, le chemin du centre C sera toujours le même (*Théor. I.*) Donc etc. On voit aisément que la démonstration s'étend au cas où il y auroit un plus grand nombre de corps. *Ce Q. F. D.*

REMARQUE I.

79. Cette démonstration n'auroit pas lieu, si la force accélératrice n'étoit pas constante pour chaque corps, et n'agissoit pas suivant des lignes parallèles. Car alors on

ne pourroit pas supposer ef égale et parallèle à $\phi\varphi$; dg égale et parallèle à $\delta\gamma$; et par conséquent le chemin xk du centre ne seroit pas le même dans les deux cas.

REMARQUE II.

80. Il y a cependant un cas à excepter, c'est celui où la force accélératrice seroit dirigée vers un point fixe, et agiroit en raison de la distance. Car dans ce cas, comme il est aisé de le prouver, et comme plusieurs Géomètres l'ont fait voir, le centre de gravité seroit le même que le centre de masses, et ce centre seroit attiré ou poussé vers le point fixe avec une force proportionnelle à la distance où il est de ce point. D'où il est aisé de démontrer que le Théorême précédent aura encore lieu dans le cas dont il s'agit.

En effet, puisque l'action mutuelle des corps ne change point l'état du centre de masses, qui est ici le même que le centre de gravité, le centre de gravité se trouvera donc à chaque instant à la même distance du point fixe où il auroit été sans cette action. Donc il sera attiré avec la même force. Sa vîtesse de projection est d'ailleurs la même dans les deux cas. Donc etc.

Ainsi dans ce dernier cas, suivant la Théorie connue des forces centrales, le centre de masses ou de gravité décrira une ellipse dont le point fixe sera le centre, soit que les corps agissent ou n'agissent pas les uns sur les autres; et dans le cas du Théorême précédent, le centre de masses décrira une parabole.

COROLLAIRE.

81. Les deux Théorêmes précédens fournissent des moyens très-simples de trouver le mouvement des corps inflexibles. Nous pourrons en donner quelques usages dans la suite.

SCOLIE.

82. Si on considère chaque corps comme un point, et qu'ils se meuvent dans un milieu résistant en raison de la vîtesse, 1°. Le centre de masses se mouvra en ligne droite si les corps ne sont animés par aucune force accélératrice; et il se mouvra d'un mouvement retardé en raison de la vîtesse, précisément comme si les corps eussent été libres. 2°. Le centre de gravité décrira la même ligne et avec la même loi de vîtesse, soit que les corps agissent ou n'agissent pas les uns sur les autres, pourvû que la pesanteur des corps soit constante, ou dirigée vers un point fixe et proportionnelle à la distance. C'est une suite évidente des propositions démontrées ci-dessus articles 75, 79 et 80.

THÉORÊME III.

83. *Si tant de corps qu'on voudra sont liés ensemble d'une manière quelconque, et qu'un ou plusieurs de ces corps soient forcés de se mouvoir sur un plan ou sur des plans parallèles; je dis que le chemin du centre de gravité parallèlement à ces plans sera uniforme.*

[*Ainsi, par exemple, et pour fixer l'imagination, si un corps* P, (Fig. 38) *forcé de se mouvoir dans la rainure droite* P S *dont il ne puisse sortir, traîne après lui un autre corps* M *par le moyen d'une verge* P M, *le centre de gravité g de ces deux corps décrira une courbe telle, que les parties de la ligne* K S *répondantes aux arcs parcourus par le centre g en tems égaux, seront égales.*]

Car en général, si on réduit en une seule force tous les mouvemens perdus par ces corps à chaque instant, il est clair qu'à cause de l'équilibre de ces mouvemens, la direction de la force résultante sera nécessairement perpendiculaire aux plans. Donc le centre de gravité sera continuellement écarté de la ligne droite par une force dont la direction sera (*Lem. VI.* et *art.* 77) perpendiculaire à ces plans, et dont par conséquent l'action sera toujours parallèle à une ligne donnée. Donc etc.

COROLLAIRE.

84. La même proposition seroit encore vraie, si les corps étoient animés de forces accélératrices quelconques, constantes ou non, mais de directions perpendiculaires à ces plans. D'où il s'ensuit, que si les corps se mouvoient par la seule action de ces forces sans aucune impulsion primitive, le centre de masses décriroit une ligne droite perpendiculaire à ces plans. Car dans ce dernier cas, si les corps étoient libres, le centre de gravité décriroit une droite perpendiculaire à ces plans; or son mouvement ne sera altéré que par une force dont la di-

rection sera perpendiculaire à ces plans : donc le centre de gravité ne sortira jamais de la perpendiculaire.

Si les corps pesent vers un point fixe en raison de la distance, et que la ligne tirée du centre de gravité au poin fixe dans le premier instant du mouvement, soit perpendiculaire au plan, on peut prouver de la même manière que le centre de gravité ne sortira jamais de la perpendiculaire.

SCOLIE I.

85. Les propositions qu'on a démontrées (*art.* 76 et 78) sont également vraies, quand les corps agissent les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle. Car les chemins qu'ils feroient les uns vers les autres en vertu de cette attraction, étant réciproques à leurs masses, la somme des mouvemens de même part seroit zéro; par conséquent le chemin du centre de gravité ne seroit point changé par l'action réciproque de ces corps les uns sur les autres. On peut d'ailleurs appliquer ici la démonstration donnée du Théorême I, en imaginant tous ces corps joints les uns aux autres par des verges inflexibles. Car alors en n'ayant égard qu'à leur attraction mutuelle, il est clair qu'ils resteroient en équilibre. Donc etc.

SCOLIE II.

86. Il me semble que par les principes établis jusqu'ici, on peut démontrer ou plutôt expliquer cette fameuse loi de mécanique, que dans un systême de corps

pesans en équilibre, le centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. Car supposons le système dans un état *B* infiniment proche de l'état d'équilibre; il est certain qu'il y aura dans chaque corps un petit mouvement pour se remettre à l'état d'équilibre, et l'effort de la pesanteur de chaque corps doit être regardé comme composé de ce petit mouvement, et d'un autre qui est détruit. Or comme l'état *B* est infiniment proche de l'état d'équilibre, les mouvemens détruits sont infiniment peu différens de l'effort total de la pesanteur, qui est détruit dans l'état d'équilibre; ainsi les mouvemens réels de chaque corps sont infiniment petits par rapport à ceux qu'ils auroient eus, s'ils avoient pu se mouvoir librement par leur pesanteur; et le mouvement du centre de gravité est infiniment moindre, que si les corps se fussent mûs librement. Cela ne seroit pas ainsi, si des deux états infiniment proches que l'on considère ici, l'un n'étoit pas l'état d'équilibre. D'où il s'ensuit, qu'on peut regarder le centre de gravité comme n'ayant point changé de place depuis l'état *B* jusqu'à l'état d'équilibre; c'est-à-dire, qu'entre ces deux états la descente du centre de gravité est = o. Donc dans l'état d'équilibre la descente du centre de gravité est un *maximum*, et dans certains cas un *minimum*. Elle est par exemple un *maximum* dans le cas de la *chaînette*, et un *minimum* dans le cas de plusieurs globules égaux, qui se soutiennent en formant une voûte; ce qui n'est, comme l'on sait, que le cas de la *chaînette* renversé.

Peut-être s'exprimeroit-on avec plus d'exactitude, en disant simplement que dans le cas d'équilibre la différentielle de la descente du centre de gravité est = 0; car on sait que l'égalité d'une différentielle à zéro, n'indique pas toujours nécessairement un *maximum* ou un *minimum*.

Au reste cette remarque suffit pour montrer qu'on auroit tort de déduire avec quelques Auteurs les lois de l'équilibre des fluides, de cette loi prétendue, que le centre de gravité d'une masse fluide en équilibre doit descendre le plus bas qu'il est possible. En effet si le fluide $DOSPE$, (Fig. 29) dont toutes les parties pesent vers Q en raison de la distance, est en équilibre dans le vase $MDEN$, le centre de gravité de ce fluide ne sera pas le plus près du centre Q qu'il sera possible. Car soit $MNDE = DOSPE$; il est certain 1°. que le centre de gravité de chacune de ces parties sera ici le même que leur centre de masses. 2°. Que les parties KNP, MOL prises ensemble sont égales à LSK, et que KNP, MOL, qui sont plus près du centre Q, doivent avoir leur centre de masses au-dessus de MN, et par conséquent plus près de Q que celui de LSK, qui est au-dessus de MN. Donc puisque la partie $DOLKPE$ est d'ailleurs commune à $DOSPE$ et à $DMNE$, il s'ensuit qu'en supposant $QT =$ ou $> QG$, le centre de masses du fluide $DMNE$ est plus près de Q que celui du fluide $DOSPE$: cependant la première de ces masses fluides est en équilibre, et la seconde n'y est pas. Donc etc.

J'avois déja fait cette remarque dans mon *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, article 13. Elle est présentée ici d'une manière encore plus frappante, afin de précautionner les Géomètres contre ces sortes d'applications fautives de principes mécaniques, auxquels on donne quelquefois trop de généralité.

CHAPITRE III.

Problêmes où l'on montre l'usage du principe précédent.

§. I.

Des Corps qui se tirent par des fils ou par des verges.

PROBLÊME I.

87. *TROUVER la vîtesse d'une verge* C R *fixe en* C (Fig. 30) *et chargée de tant de corps* A, B, R, *qu'on voudra, en supposant que ces corps, si la verge ne les en empêchoit, décrivissent dans des tems égaux les lignes infiniment petites* AQ, BQ, RT, *perpendiculaires à la verge.*

Toute la difficulté se réduit à trouver la ligne RS parcourue par un des corps R, dans le même tems qu'il eût parcouru RT; car alors les vîtesses BG, AM de tous les autres corps seront connues. Or regardons les vîtesses imprimées RT, BQ, AO, comme composées

sées (*art.* 30 et 60) des vîtesses $RS, ST; BG, -GQ; AM, -MO$; par notre principe, le levier CAR seroit demeuré en repos, si les corps R, B, A n'avoient reçu que les mouvemens $ST, -GQ, -MO$. Donc (17) $A.MO.AC + B.GQ.BC = R.ST.CR$, c'est-à-dire, qu'en nommant $AO, a, BQ, b, RT, c, CA, r, CB, \mathrm{r}, CR, \rho$, et RS, z, on aura

$$R.\overline{c-z}.\rho = Ar\left(\frac{z\,\mathrm{r}}{\rho} - a\right) + B\mathrm{r}\left(\frac{z\,\mathrm{r}}{\rho} - b\right);$$

par conséquent $z = \frac{Aar\rho + Bb\mathrm{r}\rho + Rc\rho\rho}{Arr + B\mathrm{r}\mathrm{r} + R\rho\rho}$.

COROLLAIRE I.

88. Soient F, f, φ, les forces motrices des corps A, B, R, et on trouvera pour la force accélératrice du corps R, $\frac{Fr + f\mathrm{r} + \varphi\rho}{Arr + B\mathrm{r}\mathrm{r} + R\rho\rho} \times \rho$, en mettant pour a, b, c (*art.* 22) leurs valeurs $\frac{F}{A}, \frac{f}{B}, \frac{\varphi}{R}$. Donc si on prend ds pour l'élément de l'arc décrit du rayon CR, et u pour la vîtesse du corps R, on aura en général (18)

(17) Voyez la note (13) *pag.* 60, et observez que $A \times MO, B \times GQ$ *etc.* sont ici les *puissances*.

(18) Il faut considérer que AO, BQ, RT sont les impulsions momentanées que les forces accélératrices communiquent aux corps A, B, R; et puisque le corps R n'en conserve que RS ou z, il s'ensuit que pour avoir le mouvement de ce corps il faut mettre dans la formule $\varphi\, d\rho = u\, du$ de l'article 21, à la place de φ la valeur de z, et ds à la place de de. Voyez la note (5) *pag.* 24.

$\frac{Fr+fr+\varphi\rho}{Arr+Brr+R\rho\rho}\cdot\rho ds=u\,du$, quelles que soient les forces F, f, φ. Il est aisé par ce moyen de résoudre le Problême des centres d'oscillation dans une hypothèse quelconque.

Supposons par exemple que le pendule oscille dans un milieu résistant comme une puissance quelconque u^n de la vîtesse, on aura au lieu de φ, $\varphi - k u^n$, (19) au lieu de F, $F - \frac{g u^n r^n}{\varpi^n}$, et au lieu de f, $f - \frac{h u^n r^n}{\varpi^n}$; et on mettra ces valeurs dans l'équation précédente; on considérera ensuite qu'en supposant x la longueur du pendule isochrone, et nommant M sa masse, et Π son poids, ou plutôt la partie de son poids qui agit perpendiculairement à la verge, on aura pour l'équation du mouvement de ce pendule (20)

$$\frac{\Pi x\,ds}{\varpi} - \frac{l u^n x^n}{\varpi^n}\times\frac{x\,ds}{\varpi} = \frac{M x x u\,du}{\varpi\varpi};$$

(19) Soit m la résistance qu'éprouveroit de la part du milieu le corps R mû avec la vîtesse p; celle qu'il éprouvera lorsqu'il sera mû avec la vîtesse u sera $\frac{m u^n}{p^n}$, ensorte que sa force motrice ne sera plus que $\phi - \frac{m u^n}{p^n}$; et il est visible que la quantité k par laquelle on a représenté $\frac{m}{p^n}$ dépend du volume, de la densité, et de la figure du corps R; il en est de même des quantités g, h, l.

(20) L'équation qui naîtra de la substitution de $\varphi - k u^n$, $F - \frac{g u^n r^n}{\varpi^n}$ etc. à la place de φ, F etc. sera de cette forme $(P+Qu^n)\,ds = u\,du$;

d'où l'on tire $\frac{\Pi \varrho\, ds}{M x} - \frac{l u^n x^{n-1} ds}{M \varrho^{n-1}} = u\, du$;

comparant cette équation terme à terme avec celle du mouvement du pendule composé, on en tirera les valeurs de x et de l; et il est à remarquer que la quantité l dépend du volume du corps M, de sa figure et de sa densité; et qu'ainsi on ne doit pas supposer toutes ces choses données (21).

Il est à remarquer de plus qu'on ne s'exprimeroit pas exactement, en disant avec quelques Auteurs que la distance x du centre d'oscillation est toujours la même,

---

celle du mouvement du pendule simple sera $\left(\Pi - \frac{l u'^n x^n}{\varrho^n}\right) ds' = M u'\, du'$ (en nommant ds' le petit arc qu'il parcourt dans un instant, et u' sa vîtesse); mais comme on suppose qu'il décrit des arcs semblables à ceux du pendule composé, on a $ds' = \frac{x\, ds}{\varrho}$ et $u' = \frac{x\, u}{\varrho}$; donc toute réduction faite $\left(\frac{\Pi \varrho}{Mx} - \frac{l u^n x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}}\right) ds = u\, du$; dans cette équation u et s signifient les mêmes choses que dans celle du pendule composé; donc les deux équations doivent être identiques, et chaque terme égal à son correspondant; ainsi on a $\frac{\Pi \varrho}{Mx} = P$; $- \frac{l x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}} = Q$.

(21) Il est visible que si on supposoit M donné, l qui en dépend, comme on vient de le voir dans la note (19), seroit donné aussi; par conséquent ayant une seule indéterminée x, et des équations $\frac{\Pi \varrho}{Mx} = P$, $- \frac{l x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}} = Q$, il ne seroit pas toujours possible de satisfaire à toutes les deux. Voyez *Mémoires de l'Acad.* 1738.

soit que le milieu résiste, soit qu'il ne résiste pas. Car les quantités F, φ, f, Π, etc. qui dépendent de la pesanteur, ne sont pas les mêmes que dans le vuide, parce que la pesanteur de chaque corps est diminuée par celle du fluide, et qu'elle l'est différemment à raison de la densité, du volume et de la figure de chaque corps; ainsi la valeur de x qu'on déduira de la comparaison des premiers termes des deux équations, ne sera pas la même que si k, g, h, l étoient $= 0$.

COROLLAIRE II.

89. De ce que $A.OM.AC+B.QG.CB=R.ST.CR$, il s'ensuit que $A.\overline{AM-AO}.CA+B.\overline{BG-BQ}.CB=R.\overline{RT-RS}.CR$, et qu'ainsi $A.AM.CA+B.BG.CB+R.RS.CR=A.AO.CA+B.BQ.CB+R.RT.CR$; c'est-à-dire que les puissances $A.AM, B.BG, R.RS$, doivent être équipollentes aux puissances $A.AO, B.BQ, R.RT$. On pourroit donc encore résoudre le problême précédent, en cherchant la ligne RS, telle, que $R.RS.CR+B.\frac{RS.CB^2}{CR}+A.\frac{RS.CA^2}{CR}$ fût égale à $R.RT.CR+B.BQ.CB+A.AO.CA$.

Le principe de cette dernière solution revient au même que celui de M. *Bernoulli* pour les centres d'oscillation, qui consiste à substituer en un point quelconque P de la verge un corps, dont la masse soit

$\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}$, et qui soit animé d'une force accélératrice, en vertu de laquelle le *moment* de ce poids soit égal aux *momens* des poids A, B, R, animés de leurs pesanteurs naturelles AO, BQ, RT, et sa vîtesse, celle du point P de la verge. D'où il s'ensuit, que cette force accélératrice sera $\frac{RS.CP}{CR}$, et qu'ainsi on aura $RS.\frac{CP}{CR}\left(\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}\right) \times CP = A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR$. Il est visible que le premier membre de cette égalité, n'est autre chose que la somme des *momens* $A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR$.

On voit par-là que sans avoir recours au point P, et sans faire aucune substitution de masses, on peut par le principe fondamental de la solution de M. *Bernoulli*, résoudre plus simplement encore qu'il ne l'a fait, le Problême des centres d'oscillation.

C'est de cette dernière manière que j'avois imaginé d'abord de résoudre ce Problême, et c'est aussi ce qu'a fait M. *Euler* dans un Mémoire imprimé au *Tome VII. de l'Acad. de Pétersbourg*, et où il se sert de ce dernier principe, que les puissances $R.RS$, $B.BG$, $A.AM$ doivent être équivalentes aux puissances $R.RT$, $B.BQ$, $A.AO$. Mais M. *Euler* n'a point démontré ce principe, qui, ce me semble, ne peut l'être que par le moyen

du nôtre. D'ailleurs l'Auteur n'a appliqué ce principe qu'à la solution d'un petit nombre de Problêmes touchant les oscillations des corps, flexibles ou inflexibles; et la solution qu'il a donnée d'un de ces Problêmes est peu exacte, comme nous aurons occasion de le faire voir dans la suite; ce qui ne servira pas peu à montrer combien notre principe est préférable, pour résoudre non-seulement les Problêmes de cette espèce, mais en général toutes les questions de Dynamique.

LEMME VII.

90. Si deux lignes infiniment petites Pp, Mm, (Fig. 31) sont jointes par les lignes finies PM, pm, et qu'on fasse $p\pi = Pp$, et $m\mu = Mm$; je dis 1°. que l'excès de PM sur $\pi\mu$ est égal à deux fois la différence de PM à pm, moins le quarré de l'angle fait entre PM et pm, multiplié par PM.

2°. Que l'angle de $\pi\mu$ avec pm est égal à l'angle de PM avec pm, multiplié par $1 + \frac{2.PM - pm}{PM}$.

Car ayant mené les lignes Ma, πe, μf parallèles à pm, et Mb, aPd, $C\pi g$, μeg perpendiculaires à pm, on aura $Mb = \mu g$; $Pd = \pi C$. Donc μe ou $\pi f = Pa$. Or deux angles infiniment petits PMa, $e\pi\mu$, dont les rayons PM, $\pi\mu$, différent infiniment peu (les lignes infiniment petites Pa, $e\mu$ étant d'ailleurs égales) ne diffèrent que d'un infiniment petit du

second ordre, puisque la différence des sinus est $\frac{\mu e}{\pi \mu} - \frac{P a}{P M} = \frac{P a (P M - \pi \mu)}{P M . \pi \mu}$, c'est-à-dire, infiniment petite du second ordre. Donc cette dernière quantité, multipliée par $P a$, sera du troisième ordre. Or $P M - p m = P M - M a + M a - p m = \frac{P a^2}{2 P M} + b m - d p$; et on trouvera de même $p m - \mu \pi = - \frac{\pi f^2}{2 . \pi \mu} + m g - C p$. Donc en négligeant les différences troisièmes, on a $P M - \pi \mu = \overline{2 . b m - d p} = 2 . \overline{P M - p m} - \frac{P a^2}{P M} = 2 . \overline{P M - p m}$ — angl. $a M P^2 \times P M$.

3°. L'angle $e \pi \mu$ ou l'angle de $p m$ avec $\pi \mu = \frac{\mu e}{\pi e} = \frac{P a}{p m - (b m - d p)} = \frac{P a}{M a - 2 (b m - d p)} = \frac{P a}{M a} + \frac{2 . \overline{b m - d p}}{M a} \times \frac{P a}{M a} =$ (en négligeant les différences troisièmes) à l'angle $a M P \left(1 + \frac{2 . \overline{P M - p m}}{P M}\right)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

91. Si les lignes $P M$, $p m$ sont égales, alors $P M - \pi \mu = -$ (angl. $a M P)^2 . P M$; et l'angle $e \pi \mu = a M P$.

COROLLAIRE II.

92. Si les lignes $M m$, $m \mu$ (Fig. 32) sont $= o$, alors $M \pi - P M = + 2 p O + \frac{P O^2}{P M}$—, et l'angle $p M \pi - P M p = - \frac{2 p O}{P M} . P M p$.

PROBLÊME II.

93. *Supposons qu'une verge* G A *fixe en* G (Fig. 33) *et située sur un plan horizontal, soit chargée de deux corps* A, D, *dont l'un* A *soit fixement attaché à la verge, l'autre* D *puisse couler librement le long de la verge par le moyen d'un anneau; on demande la vîtesse de chacun de ces corps à chaque instant, et la courbe décrite par le corps* D.

Soient $A B$, $D E$ les petites lignes décrites par les corps A, D, durant un même instant; si l'on fait l'arc $B C = A B$, et la ligne $E i = E D$ et dans la même direction, il est clair que ces lignes $B C$, $E i$ seroient parcourues par les deux corps dans l'instant suivant, si la verge ne les en empêchoit. Le corps A qui décrit nécessairement l'arc $B C$, ne décrira donc plus cet arc dans un instant égal au premier : or que la petite ligne $B Q$ infiniment peu différente de $B C$, soit celle que le corps A auroit parcourue uniformément avec la vîtesse qu'il a en B, dans l'instant qu'il parcourt $B C$ par son mouvement contraint; et que $E o$ soit la ligne que le corps

corps D eût aussi décrit uniformément dans le même tems, et au lieu de laquelle il décrira la ligne $E\,p$ à cause de la résistance de la verge; il est clair qu'en regardant les mouvemens $B\,R$ et $E\,o$, comme composés des mouvemens $B\,C$, $C\,Q$, et $E\,p$, $E\,l$, le levier $G\,B$. eût été en équilibre, si les corps A, D, n'avoient eu que les mouvemens $C\,Q$, $E\,l$. Or comme (*hyp.*) le corps D peut glisser le long de la verge, il est nécessaire pour l'équilibre, que $E\,l$ soit perpendiculaire au levier $G\,B$; et de plus, il faut que $A\,.\,C\,Q\,.\,G\,A = D\,.\,E\,l\,.\,G\,E$. Cela posé,

Soit $G\,A = a$, $A\,B = dx$, $G\,D = y$, $F\,D = \frac{y\,dx}{a}$, $F\,E = dy$, $C\,Q = a$. On suppose que $B\,Q$ seroit décrite avec la même vîtesse que $A\,B$, et $E\,o$ avec la même vîtesse que $D\,E$; donc les lignes $B\,Q$ et $A\,B$, ainsi que les lignes $E\,o$, $D\,E$ sont entr'elles comme les tems employés à les parcourir; et comme $B\,Q$, $E\,o$ seroient parcourues (*hyp.*) dans un même tems, ainsi que $A\,B$ et $D\,E$, on aura $B\,Q : A\,B$ ou $B\,C :: E\,o : D\,E$ ou $E\,i$: donc $B\,C : C\,Q :: D\,E : i\,o$. Donc $i\,o = \frac{C\,Q\,.\,D\,E}{B\,C}$. De plus $A\,.\,C\,Q\,.\,G\,A = D\,.\,E\,l\,.\,G\,E$ donne $E\,l$ ou $p\,o = \frac{A\,a\,a}{D\,y}$. Or l'angle $i\,G\,E$ (*art.* 92) $=$

$$E\,G\,D \times 1 - \frac{2\,F\,E}{G\,D} = E\,G\,D - \frac{2\,dy\,dx}{ay};$$

et si à l'angle iGE on ajoute (22) l'angle $iGo = \frac{io}{Gi} \times \frac{DF}{DE} = \frac{CQ \cdot DF}{Gi \cdot BC} = \frac{CQ}{GD} \times \frac{DF}{AB} = \frac{CQ}{GA} = \frac{a}{a}$, et l'angle oGp ou $\frac{po}{GD} = \frac{Aaa}{Dyy}$, on aura l'angle $pGE = EGD - \frac{2dydx}{ay} + \frac{a}{a} + \frac{Aaa}{Dyy}$; et comme cet angle pGE est égal à l'angle EGD (*constr.*) on a $-\frac{2dydx}{ay} + \frac{a}{a} + \frac{Aaa}{Dyy} = 0$. Donc $a = \frac{2Dydydx}{Aaa + Dyy}$.

Présentement la différence de Gi à GD est (*art.* 92) $2dy + \frac{y^2 dx^2}{a^2 y}$, et $-\frac{a dy}{dx}$ exprime la différence de Gp ou Go à Gi. Donc $Gp - GE = dy + \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{a dy}{dx}$. Donc $ddy = \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{a dy}{dx}$, ou mettant pour a sa valeur déja trouvée, $ddy = \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{2Dydy^2}{Aaa + Dyy}$, équation de la courbe DEp.

Pour en séparer les indéterminées, soit $dx = \frac{pdy}{a}$,

---

(22) Si on décrit du centre G l'arc is, l'angle $iGo = \frac{is}{iG}$, et $is = \frac{io \times DF}{DE}$, à cause des triangles semblables DFE, sio.

on aura $ddy = -\frac{dp\,dy}{p}$, et $-\frac{a^4\,dp}{p^3} - \frac{2y\,dy\,.\,a^4\,D}{p^3\,.\,(Aaa+Dyy)} = y\,dy$; cette équation étant multipliée par $\frac{1}{(Aaa+Dyy)^2}$, et ensuite intégrée, donne $\frac{a^4}{2p^2(Aaa+Dyy)^2} = G - \frac{1}{2D(Aaa+Dyy)}$

G exprimant une constante telle, que $\frac{p}{a}$ devienne à l'origine de la courbe le rapport donné de dx à dy (23).

On a donc dx ou $\frac{p\,dy}{a} = \frac{2\,dy\sqrt{D}}{\sqrt{(Aaa+Dyy)[2GD(Aaa+Dyy)-1]}}$

pour l'équation de la courbe DEp.

A l'égard des vîtesses de chaque corps, on trouve (24) qu'en nommant u la vîtesse du corps A, on a $-\frac{du}{u} = \frac{CQ}{BC}$, puisque $\frac{BQ}{BC}$ est le rapport du second

---

(23) Soit PE (Fig. 34) la direction de l'impulsion que reçoit le corps D au commencement, et soient AK, Ei les lignes que les deux corps A et D tendent à décrire dans un instant en vertu des impulsions primitives; supposons qu'au lieu de ces lignes ils décrivent AB, Ep; le rapport de AB à Fp est celui qu'on doit prendre pour le rapport de dx à dy à l'origine; et le rapport de AB à Ep pour celui de g à h, qu'on suppose être les vîtesses initiales; on déterminera aisément toutes ces quantités, en suivant exactement les mêmes principes qui ont été donnés dans le Problême, ainsi que la figure l'indique.

(24) On a $AB = u\,dt$; donc puisque AB est constant, $du\,dt + u\,ddt = 0$; et par conséquent $-\frac{du}{u} = \frac{ddt}{dt} = \frac{CQ}{AB} = \frac{CQ}{BC}$.

instant au premier. Donc $-\frac{du}{u} = \frac{2Dydy}{Aaa+Dyy}$, et $\frac{u}{g} = \frac{Aaa+Dbb}{Aaa+Dyy}$, en prenant g pour la vîtesse initiale du corps A, et supposant $y=b$ à l'origine de la courbe DEp. De même si on nomme v la vîtesse du corps D, on a $\frac{dv}{v} = \frac{Ep-Eo}{Eo} = \frac{po.FD}{DE^2} = \frac{Aa\,a.ydx}{Dyy.a\left(dy^2+y^2\frac{dx^2}{a^2}\right)}$; mais on peut avoir v plus élégamment par le principe de la conservation des forces vives que nous démontrerons ci-après, et qui donne $Dvv+Auu =$ à une constante. D'où il s'ensuit, que si on appelle h la vîtesse initiale du corps D, on aura $vv = \frac{Dhh+Agg-Auu}{D}$.

REMARQUE I.

94. J'ai évité de faire dans la solution de ce Problême les dt ou élémens du tems constans, afin de pouvoir parvenir à l'équation de la courbe, sans avoir l'expression de la vîtesse, ce qui seroit nécessaire si on faisoit les dt constans, parce que dt étant $\frac{dx}{u}$, on ne peut chasser dt que quand on connoît la valeur de u. C'est ainsi que j'en userai toujours dans la suite. Ce n'est pas qu'on ne puisse avoir u par différens moyens. Mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir de quelle

manière on peut s'en passer dans la solution de ces sortes de Problêmes.

REMARQUE II.

95. Le Problême précédent ne seroit pas beaucoup plus difficile, si les corps A, D, étoient animés par des forces accélératrices p, f, de directions et de valeurs quelconques. Pour donner un essai du calcul qu'il faudroit faire en cette occasion, je supposerai chaque force accélératrice constante, et dirigée parallèlement à la verticale VA, en imaginant le système transporté sur un plan vertical. La construction demeurant la même que dans l'article 93, soit de plus QN l'espace que le corps A auroit parcouru par sa pesanteur p, dans l'instant qu'il parcourt BC par son mouvement contraint; comme cet instant diffère infiniment peu du premier, on aura (25) $QN = p.\frac{GV}{GA} + \frac{dx^2}{u^2}$; de même $o\varepsilon = \frac{f\,dx^2}{u^2}$; (26) $z\pi = \frac{A.CN.GA}{D.DG} = \frac{A\varphi}{Dy} \times$

(25) $QN = \varphi\,dt^2$, en nommant ϕ la force accélératrice suivant QN. Mais si on décompose la pesanteur p en deux forces, l'une perpendiculaire à QN, et l'autre suivant QN, la dernière sera $\frac{p \times GV}{GA}$; de plus $dx = u\,dt$; donn $QN = \frac{p \times GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2}$.

(26) On suppose ici que π soit le point où le corps D arrive au second instant; et puisqu'il parvient en π au lieu d'être en z, comme il y auroit été en vertu de son mouvement propre et de la pesanteur, il s'ensuit

$\left(a + \frac{p z d x^2}{a u^2}\right)$ en nommant $G V$, z. On aura ensuite, comme dans l'article 93, $\frac{z y d x d y}{a y y} = \left(a + \frac{p z d x^2}{a u^2}\right) \times \frac{A a}{D y y} + \frac{\alpha}{a} + \frac{f d x^2}{u^2} \times \frac{z}{a y}$; et $d d y = \frac{y d x^2}{a^2} + \frac{\alpha d y}{d x} + \frac{f d x^2 \cdot \sqrt{[a^2 - z^2]}}{a u^2}$; on a de plus $-\frac{d u}{a} = \frac{\alpha}{d x}$. Si on met dans la première équation à la place de α sa valeur $-\frac{d x d u}{u}$, ou $-\frac{u d u d x}{u^2}$, on aura (*en intégrant*) la valeur de $u u$, qui étant substituée, ainsi que la valeur de α, dans la seconde équation $d d y = \frac{y d x^2}{a^2}$ etc. on aura l'équation de la courbe $D E p$; dans laquelle on remarquera que $-\frac{z}{a} = \text{cos.}\left(\frac{x}{a}\right)$ (*), et $\frac{\sqrt{a a - z z}}{a} = \text{sin.}\left(\frac{x}{a}\right)$, ce qui donne un moyen facile de chasser z.

---

qu'en décomposant (comme on l'a enseigné) le mouvement qu'il devoit avoir, il faudra que πz soit perpendiculaire à $G C$, et que $\pi z \times D \times G \pi$ ou $\pi z \times D \times D G = A \times C N \times A G$. Donc etc.

(*) Ces expressions cos. $\left(\frac{x}{a}\right)$, sin. $\left(\frac{x}{a}\right)$ indiquent le cosinus et le sinus de $\frac{x}{a}$; et en général dans toute la suite de cet Ouvrage, je désignerai le sinus et le cosinus d'un angle quelconque ζ, par sin. ζ et cos. ζ.

REMARQUE III.

96. Si une puissance appliquée au corps A l'oblige de se mouvoir sur la courbe AN, avec une vîtesse dont la loi à chaque point soit donnée, et qu'on demande la courbe du corps D et sa vîtesse, ce problême se réduit au précédent, en cherchant de quelle force accélératrice φ le corps A devroit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le corps D, il eût à chaque point B la vîtesse donnée.

Dans la première des quatre équations de l'article précédent, on mettra φ pour $\frac{pz}{a}$, et à cause que u est donnée en x, on supposera $u = X$, et $-\frac{du}{u} = -\frac{dX}{X} = \frac{\alpha}{dx}$. Donc $\alpha = -\frac{dX dx}{X}$: cette valeur de α étant comparée à celle qu'on tirera de la première équation, on aura la valeur de φ et l'équation de la courbe DEp. Soit par exemple $f = 0$, $u =$ à une constante g, on aura $\alpha = o$, et $\frac{2\,dy\,dx}{ay} = \frac{\varphi\,dx^2}{g^2} - \frac{Aa}{Dyy}$. Donc $\varphi = \frac{2Dg^2 y dy}{Aa^2 dx}$, et $d\,dy = \frac{y\,dx^2}{a^2} -$. Donc $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(Ga^2 + yy)}}$, et $\varphi = \frac{2Dg^2 y}{Aa^3}\sqrt{[(Ga^2 + yy)]}$. Si $G = o$, on a $y = c^{\frac{x}{a}}$, et $\varphi = \frac{2Dg^2 \cdot c^{\frac{2x}{a}}}{Aa^3} -$. C'est pour-

quoi la courbe décrite par le corps D est en ce cas une *spirale logarithmique*, puisque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$.

S'il n'y avoit pas de corps au point A, mais qu'en vertu d'une puissance quelconque appliquée à la verge, la vîtesse du point A suivant AB fût donnée, on pourroit résoudre le Problême de la même manière, en imaginant qu'il y eût au point A un corps de masse quelconque, et en cherchant de quelle force accélératrice ce corps devroit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le corps D, il eût à chaque point B la vîtesse dont la loi est donnée. En général, on peut toujours employer cette Méthode, lorsque des corps se tiennent par des fils ou par des verges d'une manière quelconque, et qu'un ou plusieurs points des fils ou des verges sont supposés se mouvoir avec une vîtesse et une direction données. J'avoue qu'on peut résoudre ces Problêmes d'une manière plus simple, sans chercher quelle doit être la force accélératrice du corps dont la vîtesse est donnée, pour qu'il se meuve avec cette vîtesse en vertu de l'action des autres corps; mais la solution que nous proposons ici, quoique plus longue, n'en est pas moins tirée des vrais principes de la chose, puisqu'il est certain que la puissance qui meut le corps avec une vîtesse donnée, est différente de ce qu'elle seroit, si tous les autres corps étoient anéantis, attendu qu'une partie de cette puissance est employée à vaincre l'action de ces mêmes corps. Notre solution détermine la différence de

ces

ces deux puissances, et c'est en quoi consiste, ce me semble, la vraie métaphysique du problême dont il s'agit.

REMARQUE IV.

97. Si la verge étoit chargée de deux corps qui pussent couler librement le long de cette verge, on trouveroit de la manière suivante les courbes décrites par les deux corps.

Afin de conserver l'analogie avec la solution précédente, on supposera que le corps A existe toujours, mais qu'il soit infiniment petit par rapport aux deux corps donnés, et l'on aura $-\frac{2dydx}{ay}+\frac{a}{a}+\frac{po.}{y}=0$; et nommant z le rayon vecteur de l'autre corps que j'appelle E, $-\frac{2dzdx}{az}+\frac{a}{a}-\frac{po.Dy.}{Ezz}=0$, d'où l'on tire $\frac{a}{dx}=\frac{2Dydy+2Ezdz}{Dyy+Ezz}$; or $\frac{a}{dx}=\frac{ddt}{dt}$; donc $\frac{ddt}{dt}=\frac{2Dydy+2Ezdz}{Dyy+Ezz}$, et $bdt=(Dyy+Ezz)dx$. De plus les équations $ddy=ydx^2+\frac{ady}{dx}$, et $ddz=zdx^2+\frac{adz}{dx}$, donneront (en faisant évanouir dx^2, et mettant $\frac{ddt}{dt}$ pour $\frac{a}{dx}$) $\frac{yddz-zddy}{ydz-zdy}=\frac{ddt}{dt}$, et par

conséquent $y\,dz - z\,dy = f\,dt$; donc $y\,dz - z\,dy = \frac{f\,dx\,(D\,y\,y + E\,z\,z)}{b}$; donc supposant $z = y\,u$, on a $\frac{du}{D + E\,u\,u} = \frac{f\,dx}{b}$, et $y\,y = \frac{f\,dt}{du}$. Nous aurons donc y si nous pouvons trouver encore une équation séparée entre dt et dx. Or, 1°. le principe de la conservation des forces vives donne $g\,dt^2 = (D\,y\,y + E\,z\,z)\,dx^2 + D\,dy^2 + E\,dz^2$, ou $g\,dt^2 = b\,dt\,dx + D\,dy^2 + E\,dz^2$, équation qu'on pourroit aussi tirer directement de notre solution. 2°. L'équation $(E\,z\,z + D\,y\,y)\,dx = b\,dt$ étant différentiée deux fois de suite, donne $(2\,E\,z\,dz + 2\,D\,y\,dy)\,dx = b\,d\,dt$; et $(2\,E\,z\,d\,dz + 2\,D\,y\,d\,dy + 2\,E\,dz^2 + 2\,D\,dy^2)\,dx = b\,d^3\,t$; si on substitue dans cette dernière équation à la place de $2\,D\,dy^2 + 2\,E\,dz^2$ sa valeur $2\,g\,dt^2 - 2\,b\,dt\,dx$, à la place de $d\,dy$ sa valeur $y\,dx^2 + \frac{d\,dt\,dy}{dt}$, à la place de $d\,dz$ sa valeur $z\,dx^2 + \frac{d\,dt\,dz}{dt}$, et à la place de $(D\,y\,y + E\,z\,z)\,dx$ et de $(2\,D\,y\,dy + 2\,E\,z\,dz)\,dx$, leurs valeurs $b\,dt$ et $b\,d\,dt$, on aura $2\,b\,dt\,dx + \frac{b\,d\,dt^2}{dx\,dt} + 2\,g\,dt^2 - 2\,b\,dt\,dx = \frac{b\,d^3\,t}{dx}$, ou $\frac{b\,d^3\,t}{dx\,dt} - \frac{b\,d\,dt^2}{dx\,dt} = 2\,g\,dt$, dont l'intégrale

est $\frac{b\,d^2t}{dx\,dt} = 2g\,dt + m$; donc $b\,d^2t = g\,t\,t\,dx + m\,t\,dx + h\,dx$. Donc on aura la valeur de dx en dt. Donc, etc.

Il n'est point à craindre que les équations $\frac{f\,dx}{b} = \frac{du}{D + E\,u\,u}$ et $dx = \frac{b\,dt}{g\,t\,t + m\,t + h}$ soient la même équation; car il faudroit pour cela que $du = n\,dt$, n étant une quantité constante; donc puisque $yy = \frac{f\,dt}{du}$, on auroit y = à une constante, ce qui ne se peut; car (*hyp.*) le corps D n'est pas fixe.

Dans les *Mémoires de l'Académie* de 1742, pag. 310, on s'est contenté de trouver l'équation entre dx et dt, et par conséquent la situation de la verge à chaque instant; mais on n'a point construit les courbes décrites par les deux corps, ou plutôt on a construit ces courbes, pag. 35, par une méthode qu'on avoue n'être point géométrique, parce qu'elle ne suppose point la séparation des indéterminées; on auroit pu remarquer cependant que les équations $d\,dy = y\,dx^2$ et $d\,dz = z\,dx^2$, auxquelles on parvient en faisant dt constant, donnent $\frac{ddy}{y} = \frac{ddz}{z}$, et par conséquent $y\,ddz - z\,ddy = 0$, ou $y\,dz - z\,dy = f\,dt$, d'où on auroit pu tirer la même construction qui vient d'être donnée.

La courbe décrite par le corps D donnera la courbe décrite par le corps E, puisque $z = yu$.

REMARQUE V.

98. S'il y a trois corps D, E, H, qui puissent couler librement le long de la verge, on trouvera de la même manière que ci-dessus, une équation séparée entre dx et dt; de plus on aura par une méthode semblable, $y\,dz - z\,dy = f\,dt$, et $y\,ds - s\,dy = k\,dt$, en nommant s la distance variable du corps H au centre ou point fixe C, et supposant k une quantité constante différente de f. Donc $y\,dz - z\,dy = \frac{f}{k} \times (y\,ds - s\,dy)$; donc divisant par y^2 et intégrant, on aura $\frac{z}{y} = \frac{fs}{ky} + A$; donc si on fait $z = yu$, ou au $\frac{s}{y} = \zeta u + \gamma$, ζ et γ étant des constantes.

Maintenant on trouvera par la même méthode que ci-dessus, $b\,dt = (D\dot{y}y + E\dot{z}z + H\dot{s}s)\,dx$; donc $\frac{y\,dz - z\,dy}{D\dot{y}y + E\dot{z}z + H\dot{s}s} = \frac{f\,dx}{b}$, c'est-à-dire $\frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{D + \frac{Ezz}{yy} + \frac{Hss}{yy}} = \frac{f\,dx}{b}$; ou $\frac{du}{D + Euu + H(\zeta u + \gamma)^2} = \frac{f\,dx}{b}$; d'où l'on voit qu'on peut construire encore dans ce cas-ci les courbes décrites par chacun des corps D, E, H.

Il est visible que le problème ne sera pas plus difficile, quel que soit le nombre des corps D, E, H, etc.

REMARQUE VI.

99. S'il y a un corps A fixement attaché à la verge à une distance a que je suppose $= 1$, et deux autres corps D, E, qui puissent couler librement le long de la verge, on aura par une méthode semblable à celle de l'article 97 ci-dessus,

1°. $(D\dot{y}y + E\,z\,z + A)\,dx = b\,dt.$

2°. $y\,dz - z\,dy = f\,dt.$

3°. $d\left(\frac{b\,d\,dt}{dx\,dt}\right) = 2\,g\,dt - \frac{2\,A\,dx^2}{dt}.$

Faisons dans cette dernière équation $dx = p\,dt$, ce qui donne $\frac{d\,dt}{dt} = \frac{-dp}{p}$, et nous aurons $d\left(\frac{-b\,dp}{p\,p\,dt}\right) = 2g\,dt - 2A\,p\,p\,dt$; soit $dt = \frac{dp}{k}$; il viendra $d\left(\frac{-b\,k}{p\,p}\right) = \frac{2\,g\,dp}{k} - \frac{2\,A\,p\,p\,dp}{k}$; ou $\frac{2\,g\,dp}{k} - \frac{2\,A\,p\,p\,dp}{k} + \frac{b\,dk}{p\,p} - \frac{2\,b\,k\,dp}{p^3} = 0$, ou multipliant par $\frac{k}{p\,p}$, et intégrant ensuite, $\frac{k\,k\,b}{2\,p^4} - \frac{2\,g}{p} - 2\,A\,p + L = 0$, L étant une constante; d'où l'on tire la valeur de $d\,t$ et de $d\,x$ en p et $d\,p$, de sorte qu'on aura $d\,t = \Pi\,d\,p$, et $d\,x = \Psi\,d\,p$, Π et Ψ étant des fonctions connues de p, dont la seconde Ψ est $= p\,\Pi$.

On aura donc $Dyy + Ezz = \frac{b\,dt}{dx} - A = \frac{b\,\Pi}{*} - A$, et $\frac{y\,dz - z\,dy}{Dyy + Ezz} = \frac{f\,dt}{\frac{b\,\Pi}{*} - A} = \frac{f\,\Pi\,dp}{\frac{b\,\Pi}{*} - A}$; d'où l'on tire en faisant $\frac{z}{y} = u$, l'équation séparée $\frac{du}{D + E\,u\,u} = \frac{f\,p\,\Pi\,dp}{b - A\,p}$. On peut donc en ce cas construire les courbes décrites par les deux corps, et trouver la situation de la verge à chaque instant.

REMARQUE VII.

100. Si on supposoit deux corps A, B, fixement attachés à la verge, et deux autres qui pussent y couler librement, le problême se résoudroit encore de la même manière.

Donc en général on pourra résoudre le problême, quel que soit le nombre des corps attachés fixement à la verge, en supposant qu'il y ait outre cela deux corps qui puissent y couler librement.

Donc le problême pourra encore se résoudre également, si le nombre des corps fixement attachés à la verge est infini, c'est-à-dire, si on a égard à la masse de la verge. D'ailleurs, il est facile de voir que le calcul sera le même dans ce cas que dans celui de la remarque précédente, en prenant la quantité A pour la somme

des produits de chaque particule de la verge par le quarré de leur distance au point fixe G.

Enfin, quand il y auroit plus de deux corps pouvant couler librement le long de la verge, on voit par l'article 97, et par le précédent, que le problême se résoudroit encore par les mêmes méthodes.

Donc en général une verge droite quelconque, placée sur un plan horizontal, étant chargée de tant de corps qu'on voudra, dont les uns puissent couler librement le long de la verge, les autres y soient attachés, on pourra toujours trouver la situation de la verge à chaque instant, et les courbes décrites par chacun des corps libres, en ayant même égard, si l'on veut, à la masse de la verge; problême jusqu'ici non résolu.

PROBLÈME III.

101. *Un corps* P *descendant le long d'une courbe* C B, (Fig. 35) *et tirant après lui un autre corps* F *par le moyen d'un fil* P C F *qui passe sur une poulie* C, *trouver la vîtesse de chacun de ces corps.*

Soit Pp l'élément parcouru dans un instant par le corps P, et $Ff = pV$ l'élément parcouru par l'autre corps durant le même instant. Dans l'instant suivant, ces corps, si rien ne les en empêchoit, parcourroient $p\pi = Pp$, et $f\varphi = Ff$. Mais à cause de la résistance du fil et de son inextensibilité, la ligne $p\pi$ sera parcourue par le corps P dans un instant différent du pre-

mier, et dans ce même instant le corps F arrivera au point ϖ, tel que $\varpi C + C\pi = fC + Cp$.

Supposons présentement que, durant le tems que le corps P parcourt $p\pi$, il eût parcouru naturellement pi, et que le corps F eût décrit naturellement $f\omega$; que de plus, la pesanteur du corps F lui eût fait parcourir pendant ce même instant la verticale $\omega\nu$, et que la partie de la pesanteur du corps P, qui agit suivant pi, lui eût fait parcourir la ligne il; si on prend $po = \pi l$, il faut, par notre principe, que le corps F animé de la seule force accélératrice représentée par $\varpi\nu$ fasse équilibre au corps P animé de la force po, et de la partie de sa pesanteur et de sa force centrifuge qui est perpendiculaire à la courbe Cp suivant pZ. Or, en menant du point o la ligne $o\alpha$ qui rencontre Cp prolongée en α, et tirant αu, il est clair que le reste de la force suivant pZ étant anéanti par la résistance de la surface courbe, il y aura équilibre, si $F.\varpi\nu = P.p\alpha$.

Soit donc u la vîtesse du corps P, p sa pesanteur absolue, g celle du corps F, $Ff = dx$, $NP = y$, $Pp = ds$, $\pi i = \alpha$; on aura $il = \frac{p\,dy.ds^2}{u^2\,ds}$, et $\varphi\omega : Ff :: i\pi : Pp$, c'est-à-dire $\varphi\omega = \frac{\alpha\,dx}{ds}$; $\omega\nu = \frac{g\,ds^2}{u^2}$: soit $\varpi\nu = n$, on trouve $\varphi\varpi$ ou $-d\,dx = \frac{\alpha\,dx}{ds} + \frac{g\,ds^2}{u^2} - n$; de plus,

plus, à cause de $F.\varpi\nu = P.p\alpha$, on a $F.n = P.\frac{po.ds}{dx}$ $= \frac{P\,ds}{dx}.\left(\frac{pdy.ds^2}{u^2 ds} - a\right)$. Donc $F\,ddx + \frac{Fg\,ds^2}{u^2} + \frac{F\,a\,dx}{ds} = -\frac{P\,a\,ds}{dx} + \frac{P\,p\,ds^2\,dy}{u^2\,dx}$; par conséquent $a = \frac{-Fddx - \frac{Fg\,ds^2}{u^2} + \frac{Pp\,ds^2\,dy}{u^2\,dx}}{F\,dx^2 + P\,ds^2} \propto ds\,dx$; mais $\frac{a}{ds} = \frac{du}{u}$; donc $\frac{-Fu^2\,dx\,ddx - Fg\,ds^2\,dx + Pp\,ds^2\,dy}{F\,dx^2 + P\,ds^2}$ $= u\,du$; ou $2\,u\,du.\,\frac{(F\,dx^2 + P\,ds^2)}{P\,ds^2} + \frac{2Fu\,du\,ddx}{P\,ds^2}$ $= 2\,p\,dy - \frac{2\,F\,g\,dx}{P}$; dont l'intégrale complète (en supposant $u = o$ lorsque y et $x = o$) est $\frac{uu.(P\,ds^2 + E\,dx^2)}{P\,ds^2} = 2\,py - \frac{2\,Fgx}{P}$; et faisant $u\,u = 2\,p\,k$, on trouve $k = \frac{ds^2.\left(P\,y - \frac{F\,g\,x}{y}\right)}{P\,ds^2 + F\,dx^2}$.

On peut remarquer que $\frac{u\,dx}{ds}$ est la vîtesse du corps F; car le fil étant inextensible, le chemin du corps F à chaque instant est au chemin du corps P, comme dx est à ds.

COROLLAIRE I.

102. Si on fait $g = p$, on trouve $k = \frac{ds^2.(Py - Fx)}{P\,ds^2 + F\,dx^2}$, ce qui s'accorde avec la formule donnée sans démonstration par M. *Bernoulli*, *Tome II des Mémoires de Pétersbourg*; et peut se tirer aisément du principe de la conservation des forces vives.

COROLLAIRE II.

103. Si p et $g = o$, c'est-à-dire si les deux corps n'ont point de pesanteur, on a $\frac{uu.(P\,ds^2 + F\,dx^2)}{P\,ds^2} =$ à une constante.

COROLLAIRE III.

104. Le problême précédent se résoudroit avec la même facilité si les deux corps étoient pesans, et qu'ils fussent mus dans un milieu résistant comme une fonction de la vîtesse. Car alors mettant dans les calculs $\frac{p\,dy}{ds} + \varphi\, u$ (*) au lieu de $\frac{p\,dy}{ds}$, et dans l'équation du problême, $g + \varphi\left(\frac{u\,dx}{ds}\right)$ au lieu de g, on auroit une équation dont les indéterminées pourroient même être séparées dans quelques cas, comme quand $\varphi\, u = a + b\,u\,u$, a et b étant des constantes quel-

(*) Cette quantité $\varphi\, u$ exprime en général une fonction de u.

conques. En effet, puisque, connoissant le lieu du corps F, on connoît aussi celui du corps P, on a pour une situation quelconque des corps F, P, le rapport de dx à ds; de plus, par la nature de la courbe $C P p$, on connoît le rapport de dy à ds; enfin si on fait $dx = q\,ds$, on aura $d\,dx = dq\,ds$, et on connoîtra de même le rapport de dq à ds. Donc, supposant $dy = r\,ds$, et $dq = z\,ds$, on aura dans le cas présent

$$2u\,du\left(\frac{F\,q\,q}{P}+1\right)+\frac{2F\bar{u}\,u\,q\,z\,ds}{P}=2\,ds\,(p\,r-a-b\,u\,u)-\frac{2F\,q\,d\bar{s}}{P}\times(g+a+b\,u\,u\,q\,q);$$

équation dont les indéterminées peuvent être séparées par les méthodes connues, en supposant la quadrature des courbes.

COROLLAIRE IV.

105. Si chacun des deux corps étoit mu sur une courbe, alors nommant (Fig. 36) Ff, dt; Fu, dx; FN, dz, on trouveroit $\phi\,\varpi = \frac{u\,dt}{ds}$; $\varpi\,\nu = \frac{g\,dz}{dt}\cdot\frac{ds^2}{u^2}$; au lieu de Fn il faudra mettre $\frac{Fn\,dt}{dx}$ (27), et au lieu de $-d\,dx = \frac{u\,dx}{ds}+\frac{g\,ds^2}{u^2}+n$, on écrira

(27) Parce que le corps P n'a plus à faire équilibre au corps F animé de la vîtesse $\varpi\,\nu$, mais de la vîtesse qu'il perd suivant la direction du fil, le reste étant anéanti par la résistance de la courbe.

$-ddt=\frac{udt}{ds}+\frac{gdz}{dt}\cdot\frac{ds^2}{u^2}-n$; le problême sera résolu moyennant ces légers changemens, et l'on trouvera $d\left[\frac{uu\cdot(Pds^2+Fdt^2)}{Pds^2}\right]=2pdy-\frac{2Fgdz}{P}$. Equation qu'on pourroit trouver aussi en se servant du principe de la conservation des forces vives. Donc si la valeur primitive de u est zéro, et qu'alors y soit $=A$, et $z=0$, on aura $\frac{uu\cdot(Pds^2+Fdt^2)}{Pds^2}=2p\times(y-A)-\frac{2Fgz}{P}$

COROLLAIRE V.

106. Si dans l'article précédent on fait $uu=2pk$ et $p=g$, on aura $k=\frac{[P(y-A)-Fz]ds^2}{Pds^2+Fdt^2}$. On peut, si l'on veut, faire $A=o$, en supposant que le corps P parte de C, et l'on aura $k=\frac{(Py-Fz)ds^2}{Pds^2+Fdt^2}$.

M. *Herman*, *Tome II. des Mémoires de Pétersbourg*, a donné une solution du problème que nous avons résolu *art.* 105. Sa formule (en faisant $A=o$) revient à

$$k=\frac{\left[Py-\int\frac{Fdx^2dz}{dt^2}\right]ds^2}{Pds^2+Fdx^2}=\left(\text{en faisant } dt^2=dx^2+dq^2\right)\frac{\left[Py-Fz+\int\frac{Fdzdq^2}{dt^2}\right]ds^2}{Pds^2+Fdx^2}.$$

Or la valeur de k (en faisant $g = p$) se trouve par notre solution $\frac{2p[(Py - Fz).ds^2 - Fu^2\,dq^2]}{2p(P\,ds^2 + F\,dx^2)}$, expression qui ne sauroit revenir au même que celle de M. *Herman*, puisque la quantité négative $-Fu^2\,dq^2$ ne sauroit être égale à la positive $\int\left(\frac{F\,dz\,dq^2}{dt^2}\right)ds^2$. Il y a donc lieu de croire qu'il s'est glissé quelque inadvertance dans la solution de M. *Herman*, parce que le résultat de notre solution s'accorde avec celui qu'on trouveroit par le principe de la conservation des forces vives, et que d'ailleurs elle n'est appuyée que sur des principes fort clairs (28).

SCOLIE.

107. La solution du problême III. pourra paroître un peu longue : mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire

---

(28) Deux choses rendent fautive la solution de M. Herman.

La première est qu'il égale le produit de $\frac{ds}{u}$ par l'effet instantané de la force motrice d'un des corps, à la somme des quantités de mouvement que les deux corps reçoivent pendant un instant, au lieu qu'on ne doit l'égaler qu'à la quantité de mouvement que reçoit celui dont on considère la force motrice, comme on peut le voir par l'*art.* 107.

La seconde est qu'après avoir nommé u la vîtesse du corps P suivant Pp, et v la vîtesse du corps F suivant FC, il suppose que l'on ait $du : dv :: ds : dx$. Il est vrai que $u : v :: ds : dx$, puisque ces petites lignes sont supposées parcourues dans un même instant avec des vîtesses uniformes ; mais la conséquence qu'on en tire suppose que ds et dx soient constans, ou au moins que $dds : ddx :: ds : dx$; ce qu'il n'est point permis de supposer.

voir comment mon principe s'y applique. Car si on vouloit résoudre autrement ce problême, on pourroit s'y prendre ainsi. Soit T la tension du fil, qui agit également suivant CP et CF, on aura $\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}$ pour la force qui accélère le corps P suivant Pp, et $\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}$ pour celle qui accélère le corps F suivant Ff; on aura donc $\left(\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}\right) ds = P u du$, et $\left(\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}\right) dt = \frac{F}{2} d\left(\frac{uudt^2}{ds^2}\right)$, d'où l'on tire en ajoutant ces deux équations, et intégrant, $uu + \frac{uuFdt^2}{Pds^2} = 2py - \frac{2Fgz}{P}$.

Cette dernière solution est à la vérité plus simple que celle de l'article 105; mais je crois que d'un autre côté elle n'est pas tout-à-fait si lumineuse ni si directe. Car, à parler exactement, le fil n'agit point sur les corps; il n'a qu'une force de résistance, et nullement d'impulsion.

PROBLÊME IV.

108. (*) *Un corps P étant mu dans une rainure courbe $APp\pi$,* (Fig. 31) *où il est animé d'une force accélé-*

(*) Quoique ce problême soit ici à sa véritable place eu égard à l'ordre des matières, on peut néanmoins, si on le trouve trop compliqué, en remettre la lecture après celle du problême VII et de ses Corollaires.

trice quelconque φ, *et traînant après lui deux autres corps* M, M, *par le moyen d'une verge inflexible* $M\,P\,$M, *on demande la vîtesse du corps* P *et les courbes décrites par les deux corps* M, M.

Soient $P\,p$, $M\,R$, M R les lignes décrites par les corps P, M, M durant un instant quelconque, je fais $p\,\pi = P\,p = p\,\varpi$, et je suppose que dans l'instant que le corps P parcourt $p\,\pi$ par son mouvement contraint il eût parcouru naturellement et uniformément $p\,f$, et de plus $f\,q$ en vertu de la force φ; je fais de plus $R\,i = M\,R$; R i = M R; et je suppose que dans le même tems que le corps P parcourt $p\,\pi$, le corps M eût parcouru $R\,K$, et le corps M, R K, il faut par notre principe décomposer la force suivant $R\,K$ en deux autres $R\,Z$, $R\,e$, et la force suivant R K en deux autres R Z, R e, qui soient telles, que si les corps P, M, M, n'étoient animés que des seules forces $\pi\,q$, $R\,Z$, R Z, ils se fissent équilibre et que le système demeurât en repos, et que s'ils n'avoient que les mouvemens $p\,\pi$, $R\,e$, R e, ils pussent conserver ces mouvemens sans se nuire réciproquement, c'est-à-dire que l'on eût $\pi\,e = P\,M$, π e = P M, et $e\,e = M\,M$.

Je décompose d'abord la force suivant $R\,Z$ en deux autres, dont l'une $R\,V$ soit dans le prolongement de $p\,R$, et de même la force suivant R Z en deux, dont l'une R V soit dans le prolongement de p R; et je suppose $R\,V$ et R V telles, que les corps P, M, M animés des seules forces $\pi\,q$, $R\,V$, R V se fassent équili-

bre, ce qui arrivera si, en imaginant ces forces réunies en p, la force unique qui en résultera est perpendiculaire à la rainure, c'est-à-dire si $P \times \pi q = \frac{M.RV.GP}{PM} + \frac{M.RV.gP}{PM}$. (A) (29).

Il ne restera plus aux corps M, M que les forces RX, R X qui doivent encore se détruire mutuellement, ce qui ne peut arriver que quand les lignes RX, R X sont dans la même droite R R, et qu'on a $M.RX = M.RX$. (B) (30).

Soit à présent $PM = a$, $GM = y$, $gM = y$, $PM = b$, la perpendiculaire constante $PQ = c$, la ligne MM ou RR, e, u la vîtesse en P suivant Pp; $Pp = dx$, $\pi f = \alpha$, $RX = z$, R X $= z$, on aura $fq = \frac{\phi\, dx^2}{u^2}$, et $\pi q = \alpha + \frac{\phi\, dx^2}{u^2}$.

---

(29) Les forces suivant RV, R V sont ici décomposées en forces perpendiculaires à $p\pi$, et en forces suivant $\pi p\, \Gamma$: les premières sont détruites par la rainure, ainsi les secondes doivent anéantir la force πq; or elles sont $\frac{RV \times GP}{PM}$, et $\frac{RV \times gP}{PM}$; en effet, il est visible qu'on peut regarder pR comme parallèle à PM. Donc $P \times \pi q =$ etc.

(30) On pourroit demander si l'on n'est pas en droit de supposer tout de suite que RZ, R Z sont couchées sur RV, R V, et font équilibre avec la force suivant πq, puisque ces forces doivent être détruites; pour répondre à cette question, il faut observer qu'une telle supposition entraîneroit celle-ci, que les deux corps M, M n'agissent point l'un sur l'autre, ce que la nature de la question ne permet pas de supposer; car la verge étant inflexible, et l'angle MPM constant (*hyp.*) les corps M, M sont dans le même cas que s'ils étoient unis par une verge inflexible MM.

Si

Si du centre p on décrit l'arc $\pi\varpi$, et qu'on tire les lignes πi, πK; Ro; parallèle à VK; oe sera égale et parallèle à RX (31), et nommant r le rayon osculateur en p, 1°. l'angle de pR avec PM sera $\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}} + \frac{dx}{r}$; (32) or $\frac{\varpi i - pR}{a}$ est égal (*art.* 91) au quarré de cet angle. Donc $\varpi i - pR = a \times \left(\frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}} + \frac{dx}{r}\right)^2$. 2°. On aura aussi

---

(31) Car si on imagine ZK, cette ligne sera égale et parallèle à Re, à cause de la décomposition qui a été faite : de plus, la ligne Ro est parallèle à VK par la supposition, et elle peut être censée lui être égale, parce que Ko et RV peuvent être censées parallèles, et que RV, Ko, sont infiniment petites du second ordre ; donc le triangle VZK peut être censé semblable et égal au triangle Reo; donc VZ ou RX peut être censée égale et parallèle à oe.

(32) $\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$ est la différentielle de l'angle GPM, et doit être égal à $\Gamma pR - GPM$; parce que l'angle GPM est considéré, non pas comme l'angle que PM fait dans toutes ses différentes positions avec la même ligne PG, mais comme l'angle que fait PM avec chaque côté Pp parcouru successivement; ensorte que l'angle GPM devient au second instant ΓpR et par conséquent $\Gamma pR - GPM = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$.

Outre cela l'angle ΓpP est $= \frac{dx}{r}$, parce que l'angle des deux côtés de la courbe est égal à l'angle que font les rayons de la développée. Or, l'angle de pR avec PM est $\Gamma pR - GPM + \Gamma pP$. Donc, etc.

(33) $\pi i - \varpi i = \frac{\pi\varpi \cdot MG}{MP} = \frac{y\,dx^2}{ra}$,

r étant toujours le rayon osculateur de la courbe APp en p. 3°. Si on décrit du centre L les arcs MN, PT, et du centre π l'arc (*) iV, on aura VK ou $\pi i - \pi K = \frac{iK \cdot RN}{MR}$, ou (à cause que $iK : MR :: \pi f : Pp$) $VK = \frac{\pi f \cdot RN}{Pp} = \frac{\pi f \cdot pT}{Pp}$ $= \frac{\pi f \cdot PG}{MP} = \frac{a\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a}$. 4°. $\pi K - \pi o = Ko = RV$,

et (34) $\pi o - \pi e = \frac{oe \cdot MQ}{MP} = \frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a}$

Donc $\pi e - pR$ ou $\varpi e - PM = -\frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a}$

---

(33) $\pi i - \varpi i = \frac{\pi\varpi \cdot MG}{MP}$, parce que le triangle $\pi s \varpi$ rectangle en s est semblable au triangle MGP, πi pouvant être censée parallèle à PM.

(*) L'angle πiK ne diffère qu'infiniment peu de l'angle aigu PMR, quoique cela ne paroisse guère dans la figure, où l'on a été obligé pour éviter la confusion, de faire assez grandes les lignes MR, Ri qu'on suppose infiniment petites : d'où l'on voit que l'arc iV doit tomber au-delà de iK par rapport à π, et qu'on aura un triangle iVK semblable à MRN.

(34) $\pi o - \pi e = \frac{oe \times MQ}{MP}$. Car menant et perpendiculaire à πo, la différence to des lignes πo, πt peut être prise pour $\pi o - \pi e$; or $to = \frac{oe \times MQ}{MP}$, parce que le triangle oet est semblable au triangle MQP, oe ayant été démontrée parallèle à RX ou MM, et ot l'étant à PM.

$-RV-\frac{a\sqrt{[a^2-y^2]}}{a}+\frac{y\,dx^2}{ar}+a\left(\frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}}+\frac{dx}{r}\right)^2$; mais la ligne πe doit être $= PM$. Donc (C) $\frac{z\sqrt{[a^2-c^2]}}{a}+RV+\frac{a\sqrt{[a^2-y^2]}}{a}=\frac{y\,dx^2}{ar}+a\left(\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}+\frac{dx}{r}\right)^2$. On trouvera de même pour l'autre corps M, $\frac{z\sqrt{[b^2-c^2]}}{b}+RV+\frac{a\sqrt{[b^2-y^2]}}{b}=-\frac{y\,dx^2}{br}+b\left(\frac{dy}{\sqrt{(b^2-y^2)}}-\frac{dx}{r}\right)^2$. (D)

Je remarque ensuite que $\frac{MN-PT}{PM}$ est égal à l'angle de pR avec PM ; or, on a vu que cet angle est $\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{dx}{r}$. Donc $MN=PT+PM\times\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{dx}{r}\right)=\frac{y\,dx}{a}+\frac{a\,dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{a\,dx}{r}$. Or, l'angle de ϖi avec pR est égal (*art.* 91) à l'angle de pR avec PM ; l'angle de ϖi avec $\pi i=\frac{\pi\varpi\cdot PG}{PM^2}$; l'angle de πi avec

$\pi K = \frac{iY}{PM} = \frac{iK \cdot MN}{MR \cdot PM} = \frac{\pi f \cdot MN}{Pp \cdot MP}$; l'angle de πK ou πo avec $\pi e = \frac{oe \cdot PQ}{PM^2} = \frac{zc}{u^2}$. Donc l'angle de πe avec ϖi (c'est-à-dire la différence seconde de l'angle de pR et PM) sera égal à la somme de tous ces angles pris avec les signes convenables, c'est-à-dire qu'on aura (E) $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}} + \frac{dx}{r}\right)$ $= \frac{dx^2 \cdot \sqrt{[a^2-y^2]}}{a^2 r} + \frac{a}{a\,dx}\left(\frac{y\,dx}{a} + \frac{a\,dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}} + \frac{a\,dx}{r}\right) - \frac{zc}{a^2}$: on aura de même (F) $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[b^2-y^2]}} - \frac{dx}{r}\right) = -\frac{dx^2\sqrt{[b^2-y^2]}}{b^2 r}$ $+ \frac{a}{b\,dx}\left(\frac{y\,dx}{b} + \frac{b\,dy}{\sqrt{[b^2-y^2]}} - \frac{dx}{r}\right) - \frac{\xi c}{b^2}$.

Si on met ensuite dans les équations A et B ci-dessus, à la place des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on aura $P\left(a + \frac{\phi\,dx^2}{u^2}\right) = \frac{M \cdot R\,V \cdot \sqrt{[a^2-y^2]}}{a}$ $+ M \cdot R\,V \cdot \frac{\sqrt{[b^2-y^2]}}{b}$ (G); $\frac{M}{M} = \frac{z}{z}$ (H); et enfin $\frac{a}{dx} = \frac{-du}{u}$ (L).

On remarquera de plus qu'à cause de l'inflexibilité de la verge, l'angle MPM est constant, de sorte que $\frac{y}{b}$

est toujours donné en $\frac{y}{a}$. Employant donc les sept dernières équations à chasser α, u, RV, RV, z et z, on arrivera à une équation finale qui ne contiendra plus que dx avec y, dy, ddy, et qui sera l'équation d'une des courbes. Après quoi il sera aisé de trouver l'autre.

Pour simplifier les calculs de ce problême, on nommera l'angle MPG, ϵ, et l'angle constant MPM, A; ce qui donnera $\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}} = d\epsilon$, $y = a$ sin. ϵ, $\sqrt{a\,a - y\,y} = a$ cos. ϵ, $\frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = d(A-\epsilon) = -d\epsilon$; $y = b$ sin. $(A-\epsilon)$, $\sqrt{b\,b - y\,y} = b$ cos. $(A-\epsilon)$, ou, ce qui est la même chose, $y = b$ sin. A cos. $\epsilon - b$ sin. ϵ cos. A, et $\sqrt{b\,b - y\,y} = b$ cos. A cos. $\epsilon + b \times$ sin. A sin. ϵ. Cela posé, on mettra d'abord dans toutes les équations, à la place de α sa valeur $-\frac{du\,dx}{u}$, et à la place de z sa valeur $\frac{Mz}{M}$; ensuite on tirera de l'équation (E) une valeur de z; qui étant mise dans (C) et dans (D), donnera RV et RV; et ces valeurs de RV et de RV étant mises dans (G), on aura une équation dont l'intégration donnera la valeur de u; mettant cette valeur de u dans l'équation (F), on aura une équation finale qui ne contiendra plus que dx et ϵ avec ses différences $d\epsilon$, $d\,d\epsilon$.

Si φ étoit $= o$, on n'auroit pas besoin de la dernière équation (L) pour trouver l'équation des deux courbes; cette équation (L) ne seroit nécessaire que pour trouver la vîtesse u.

REMARQUE I.

109. Si MP, PM étoient des fils, alors les forces suivant RX et RX seroient nulles, et on auroit $z = o$ et $z = o$. Mais comme y ne seroit plus donné en y, on auroit six équations, et quatre inconnues α, RV, RV, et u à faire disparoître; il restera deux équations.

COROLLAIRE I.

110. Supposons, pour simplifier les choses, que $r = o$, $b = o$, $\varphi = o$, c'est-à-dire que le corps P soit dans une rainure droite et tire après lui un seul corps M, par le moyen d'une verge ou d'un fil, ce qui dans le cas présent revient au même, on aura $RV = \frac{P a \alpha}{M\sqrt{[a^2 - y^2]}}$ $= -\frac{\alpha\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + \frac{a\,dy^2}{a^2 - y^2}$: d'où l'on tire $\alpha = \frac{M a\,dy^2}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} \times \frac{a}{Paa + M(a^2 - y^2)}$, et $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}\right) = \frac{\alpha}{a\,dx} \times \left(\frac{y\,dx}{a} + \frac{a\,dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}\right)$ $= \frac{M a a\,dy^2}{\sqrt{[a^2 - y^2]}\,(Paa + M[a^2 - y^2])} \times \left(\frac{y}{aa} +\right.$

$\frac{dy}{dx\sqrt{[a^2-y^2]}}$). Soit $dx = \frac{p\,dy}{a}$, et l'on trouvera après les substitutions $\frac{-dp}{p\sqrt{aa-yy}} + \frac{y\,dy}{(aa-yy)^{\frac{3}{2}}}$ $- \frac{My\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}\times[Paa+M(a^2-y^2)]} =$ $\frac{Ma^2\,dy}{p(aa-yy)[Paa+M(a^2-y^2)]}$. Cette équation étant multipliée par $\frac{p(aa-yy)}{\sqrt{(Paa+M(a^2-y^2)]}}$ et ensuite intégrée, donne $\frac{-p\sqrt{[a^2-y^2]}}{\sqrt{[Paa+M(a^2-y^2)]}} = A +$ $\frac{May}{\sqrt{[Paa+M(a^2-y^2)](M+P)}}$, A marquant une constante prise avec cette condition, que le rapport de dx à dy exprimé par $\frac{p}{a}$ soit égal au rapport donné de ces différentielles, lorsque les corps commencent à se mouvoir.

COROLLAIRE II.

111. Soit dans le Corollaire précédent, la constante $A = 0$, on trouve $p = -\frac{M}{M+P}\cdot\frac{ay}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$, et $dx = -\frac{My\,dy}{(M+P)\sqrt{[a^2-y^2]}}$.

Cette dernière équation fait voir que dans ce cas la

courbe cherchée est géométrique. Pour la construire, on supposera que CP (Fig. 38) soit la position du fil au premier instant, et ayant décrit du centre P l'arc CMK, et abaissé d'un point quelconque M la perpendiculaire MG, on prendra $NS = GP$, puis $PO = \frac{PS.M}{M+P}$, et ayant tiré OT égale et parallèle à PM, le point T sera un des points de la courbe. Pour en trouver l'équation par rapport aux coordonnées NQ, QT, on remarquera que $QT = MG = y$; et appellant NP, f, NQ, t, on verra que $NQ = BT = OS = \frac{P.SP}{M+P}$ $= \frac{NG \times P}{M+P} = [\sqrt{(aa - yy)} - f] \cdot \frac{P}{M+P}$. On a donc $t = [\sqrt{(aa - yy)} - f] \cdot \frac{P}{M+P}$, et $t + \frac{fP}{M+P} = \frac{P}{M+P} \times \sqrt{[aa - yy]}$, ce qui est l'équation d'une ellipse dont le centre D se trouvera en faisant $ND = \frac{NP.P}{M+P}$, et dont les deux axes sont $DE = a$, et $DX = Cg = \frac{a.P}{M+P}$.

Donc lorsque l'impulsion primitive des corps P et M sera telle, que le premier dx soit au premier dy comme $\frac{-My}{(M+P)\sqrt{[a^2 - y^2]}}$ est à 1, le corps M décrira une ellipse, telle qu'on vient de la déterminer.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

112. Si l'on fait $P = m.M$, la valeur générale de dx est $-\frac{y\,dy}{(1+m).\sqrt{[a^2-y^2]}} - \frac{A\sqrt{M}dy\sqrt{[(1+m).a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$, ce qui fait voir que si A n'est pas $= o$, la courbe à la vérité n'est pas Géométrique, mais peut se construire par la rectification de l'ellipse. Car $\frac{dy\sqrt{[(1+m)a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}} = \frac{dy\sqrt{[(1+m).qa^2-qy^2}}{\sqrt{q}.\sqrt{[a^2-y^2]}}$: or la formule générale de l'élément de l'ellipse étant $\frac{dy\sqrt{[a^2+\left(\frac{p}{2a}-1\right).y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$, si on fait $(1+m).q = 1$, et $-q = \frac{p}{2a} - 1$, on trouvera $q = \frac{1}{1+m}$ et $\frac{p}{2a} = \frac{m}{1+m}$; d'où il s'ensuit que $\frac{dy\sqrt{[(1+m)a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$ est l'élément d'un arc d'ellipse, dont l'abscisse est y, le grand axe $= 2a$, et le rapport du parametre à cet axe, $\frac{m}{1+m}$, cet arc étant divisé par $\sqrt{q}$ ou multiplié par $\sqrt{[1+m]}$; ou, ce qui revient à la même chose, c'est l'élément d'un arc d'ellipse dont le grand axe $= 2a\sqrt{[1+m]}$, l'abscisse $= y\sqrt{[1+m]}$, et le rapport du parametre à l'axe $= \frac{m}{1+m}$.

REMARQUE II.

113. Ce que nous venons de dire dans les deux Corollaires précédens, et qui a été déduit du Problême général, peut se déduire d'une manière plus simple de deux Théorêmes donnés au commencement de cette seconde partie (*art.* 83 et 84); savoir, que le centre de gravité g des corps P, M, (Fig. 39) descend dans une ligne droite perpendiculaire à la rainure PQ, ou au moins que son mouvement parallèlement à PQ est uniforme. Car quand le centre g descendra dans une ligne droite sgV, on sait par les sections coniques, que le point M décrira une ellipse; et dans les autres cas, il n'y a qu'à imaginer que le point g descende dans une droite perpendiculaire à la rainure, tandis que le point P avance vers Q, et que le point M décrit une ellipse, et faire mouvoir ensuite tout le système parallèlement à PQ, avec la vîtesse uniforme que doit avoir le centre de gravité parallèlement à PQ. Il est à remarquer que tout ceci a lieu, même lorsque les corps P, M, sont pesans, pourvu que la rainure PQ soit alors horizontale.

Soient PQ, MN les vîtesses primitivement imprimées aux corps P, M; on décomposera la vîtesse MN en deux autres, dont l'une MR soit perpendiculaire, et l'autre MS parallèle à la rainure, et on prendra sur RN la partie RT telle, que $M.RT=P.PQ$; $\frac{TN\times M}{M+P}$ sera la vîtesse du centre de gravité parallèlement à PQ,

et le problême sera entiérement résolu, si, abstraction faite de la vîtesse commune $\frac{TN \times M}{M+P}$, on trouve la vîtesse du point M dans son ellipse et celle du point P. C'est ce qu'on trouvera facilement par le principe de la conservation des forces vives, que nous démontrerons ci-après. Voilà, comme l'on voit, une méthode bien simple pour résoudre ces problêmes.

Remarque III.

114. Si au lieu de supposer le corps P animé d'une force accélératrice φ, on supposoit qu'il fût contraint de se mouvoir sur la courbe $A\,P\,p$ (Fig. 37) avec une vîtesse dont la loi fût donnée, le problême pourroit toujours se résoudre de la même façon. Il ne seroit question que de déterminer la force φ. *Voyez l'art.* 96 *ci-dessus.*

PROBLÊME V.

115. *Un fil* C m M *fixe en* C, (Fig. 40) *et chargé de deux poids* m, M, *étant infiniment peu éloigné de la verticale* CO, *trouver la durée des oscillations de ce fil.*

Soit $m\,u$ l'arc parcouru pendant le premier instant par le corps m, et $M\,\nu$ l'arc décrit dans le même tems par le corps M. On peut regarder le corps M comme ayant à la fois deux mouvemens, dont l'un $M\,V$ est égal et parallèle au mouvement $m\,u$ du corps m, et l'autre $V\,\nu$ est un mouvement circulaire autour du centre m ou u. Nous décomposerons d'abord l'effort absolu de la pesan-

teur du corps m suivant $m\,Q$, en deux autres, dont l'un soit capable de faire parcourir au corps m la ligne $m\,u$ dans le premier instant, et l'autre soit dirigé suivant la ligne $m\,R$ dont la position est inconnue. Ce dernier effort doit être détruit, puisque (*hyp.*) le corps m ne peut se mouvoir que suivant $m\,u$. Nous décomposerons de même l'effort absolu de la pesanteur du corps M suivant $M\,L$, en deux autres, dont l'un fasse parcourir au corps M la ligne $M\,V$, et l'autre $M\,N$ puisse se décomposer de nouveau en deux autres, dont l'un fasse parcourir au corps M la ligne $V\,v$, l'autre soit entiérement détruit, ou, ce qui revient au même, fasse équilibre avec l'effort suivant $m\,R$ qui doit s'anéantir aussi. Or il est nécessaire pour cela 1°. que l'effort du corps M qui doit être détruit, soit dirigé suivant $M\,P$ dans la direction de $m\,M$ prolongée; 2°. que cet effort soit à l'effort suivant $m\,R$, comme l'angle infiniment petit $S\,m\,R$ (fait par $m\,R$ et $C\,m$ prolongée), est à l'angle $M\,m\,S$ (35), parce qu'il faut pour l'équilibre que la force résultante du concours de ces deux efforts soit dirigée suivant $m\,S$. Cela posé,

Soit $C\,m = l$, p la pesanteur du corps m, P celle du

---

(35) La force résultante et les deux forces composantes sont, comme on l'a vu, représentées par la diagonale et les côtés d'un parallélogramme fait sur leurs directions, d'où il est aisé de conclure qu'elles sont aussi représentées chacune par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres; mais quand les angles sont infiniment petits ils sont dans le rapport de leurs sinus. Donc etc.

corps M, $Mm = L$, $mK = x$, $MQ = y$, φ la force accélératrice suivant mu; on aura 1°. la force φ à la pesanteur p, comme l'angle RmQ est au sinus de l'angle droit Rmu. Donc nommant le sinus total 1, on aura l'angle $RmQ = \frac{\phi}{p}$. 2°. On trouvera de même l'angle $NML = \frac{\varphi}{P}$: donc l'angle $PM\widehat{N} = \frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P}$, et la force accélératrice suivant $Vv = P\left(\frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P}\right)$; mais l'effort du corps M suivant MP, qui ne diffère qu'infiniment peu de son effort suivant ML, et qui peut par conséquent s'exprimer par $M \times P$, doit être à l'effort du corps m suivant $mR\,(m \times p)$: : l'angle RmS ou $\frac{x}{l} - \frac{\varphi}{p}$ est à l'angle MmS ou $\frac{y}{L} - \frac{x}{l}$; donc $m.\ \varphi = \frac{mpx}{l} - M.\ P \times \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$, et par conséquent $\varphi = \frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$, et l'effort suivant Vv sera $\frac{Py}{L} - \frac{px}{l} + \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$.

Si on nomme présentement t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, on a (*art.* 20) les équa-

tions (K) $-ddx=\left[\frac{px}{l}-\frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L}-\frac{x}{l}\right)\right]dt^2$ (36),

et $-ddy=\left[\frac{yP}{L}.\frac{(M+m)}{m}-\frac{x}{l}.\left(p+\frac{M.P}{m}\right)\right]dt^2$ (N).

Ce sont ces deux équations qui serviront à déterminer le mouvement de chaque corps.

COROLLAIRE I.

116. Si on suppose que les forces initiales suivant mu et Vv soient entr'elles, comme mK à MQ; c'est-à-dire si

(O) $\frac{px}{l}+\frac{MPx}{lm}-\frac{MPy}{Lm}:\frac{yP}{L}\left(\frac{M+m}{m}\right)-\frac{x}{l}\left(p+\frac{M.P}{m}\right)::x:y$;

je dis que les corps M, m, arriveront dans le même tems à la verticale CO. Car il faut pour cela que les arcs MQ, mK soient parcourus dans le même tems: or si l'analogie précédente a lieu, les petites parties dont les arcs mK, MQ diminueront au premier instant et dans les suivans, seront entr'elles comme ces arcs, et les forces accélératrices seront toujours entr'elles comme les arcs qui resteront à parcourir jusqu'au point de repos. Donc etc.

L'analogie (O) étant réduite en équation donne

$$\frac{pxy}{l}+\frac{MPxy}{lm}-\frac{MPyy}{Lm}=\frac{yxP}{L}.\left(\frac{M+m}{m}\right)-\frac{xx}{l}\left(p+\frac{M.P}{m}\right)$$

ou $\frac{y}{x}+\frac{M+m}{2M}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}=\pm\sqrt{\left[\frac{pLm}{MPl}+\frac{L}{l}+\left(\frac{M+m}{2M}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}\right)^2\right]}$,

et $\frac{y+x}{x}=\frac{-m+M}{2M}+\frac{pLm}{2PMl}+\frac{L}{2l}\pm\sqrt{\left[\frac{pLm}{MPl}+\frac{L}{l}+\left(\frac{M+m}{2M}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}\right)^2\right]}$.

(36) On donne ici le signe — à ddx et ddy, quoique le mouvement soit accéléré; mais il faut faire attention que t croissant, x et y diminuent.

COROLLAIRE II.

117. Si $P = p$, c'est-à-dire si les corps M et m sont de même gravité spécifique, on aura

$$\frac{y+x}{x} = \frac{Ml - ml + ML + mL}{2Ml} \pm \frac{\sqrt{[4MmLl + 4MMLl + (Ml + ml - ML - mL)^2]}}{2Ml}$$: la quantité qui est sous le signe radical se peut changer en $\sqrt{[4MmLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}$, et alors le rapport de $y + x$ à x sera précisément le même qui a été donné pour ce cas seulement, par M. *Dan. Bern. Mém. de Pétersbourg, Tome VI, p.* 111. Cet Auteur en a donné ensuite la démonstration dans le Tome VII des mêmes Mémoires. M. *Euler* a donné aussi dans le Tome VIII une solution de ce même problême. Comme il est curieux, et qu'il peut servir à en résoudre plusieurs autres semblables, j'ai cru devoir montrer comment mon principe s'y applique. Au reste je ferai voir plus bas qu'il y a d'autres cas que celui-ci, où les deux corps arrivent toujours en même tems à la ligne verticale CO.

COROLLAIRE III.

118. Si la situation du fil CMm au commencement du mouvement, n'est pas celle qui est indiquée dans le Corollaire qui précède, ou si en général cette situation est quelconque, il faut recourir en ce cas à l'intégration

des équations (K) et (N) de l'*art.* 115. pour trouver le mouvement des corps m et M. Je supposerai d'abord, pour rendre les calculs les plus simples qu'il sera possible, non-seulement $P = p$, mais encore $M = m$ et $l = L$; de plus, pour rendre les équations (K) et (N) homogènes, je supposerai que T soit le tems pendant lequel la force accélératrice p feroit parcourir au corps m ou M un espace $= l$; de cette manière les équations (K) et (N) seront changées en celle-ci : (P) $-ddx = (2x - y).\frac{2dt^2}{T^2}$, et (Q) $-ddy = (2y - 2x)\frac{2dt^2}{T^2}$ (*art.* 27).

Pour intégrer ces équations, je me sers de la méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse*, année 1748. et ailleurs. Je multiplie la seconde par un coefficient indéterminé ν, et ensuite je les ajoute ensemble, ce qui donne $-ddx - \nu\,ddy = \frac{2dt^2}{T^2} \times (\overline{2 - 2\nu}.x \pm \overline{2\nu - 1}.y)$.... (R). Je fais en sorte que $(2 - 2\nu)x + (2\nu - 1)y$ soit un multiple de $-x - \nu y$, ce qui donne $2 - 2\nu = \frac{2\nu - 1}{\nu}$; et $\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; donc faisant $x + \nu y = u$, ou plutôt $x + \frac{y}{\sqrt{2}} = u$, et $x - \frac{y}{\sqrt{2}} = u'$, on aura les deux équations $-dd\,u = (2 - \sqrt{2}).\frac{2u\,dt^2}{T^2}$,

et

et $-mdu' = (2+\sqrt{2})\frac{2u'dt^2}{T^2}$; multipliant par 1ere par du, on a l'intégrale $\frac{du^2}{AA-uu} = (4+2\sqrt{2})\frac{dt^2}{T^2}$; d'où l'on tire $\frac{-du}{\sqrt{AA-uu}} = \frac{dt}{T}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$, parce que t croissant, u diminue; donc $u = A\cos.\frac{t\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{T}$, et $u' = B\cos.\frac{t\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{T}$, intégrales qui sont complettes, parce que dx et dy étant $= 0$ lorsque $t = 0$, il faut que du et du' soient $= 0$ lorsque $t = 0$; de-là on tirera les valeurs de x et de y, et on déterminera les constantes A et B par les valeurs connues et données de x et de y lorsque $t = 0$.

REMARQUE I.

119. Si l'on cherche dans le cas que nous venons d'examiner au Corollaire précédent, c'est-à-dire lorsque $P = p$, $M = m$ et $L = l$, quel doit être le rapport des lignes X, Y pour que les corps m, M arrivent dans le même tems à la verticale, on trouvera (*art.* 116) $2X - Y : 2Y - 2X :: X : Y$, donc $Y^2 - 2XY = 2X^2$, et $\frac{Y}{X} = +\sqrt{2}$, la même valeur qu'on a trouvée pour $\frac{1}{\frac{Y}{X}}$. En effet, pour peu qu'on fasse d'attention à la nature du problème, on verra que quand il y a deux corps

m, M, les deux valeurs de $\frac{1}{\nu}$ doivent être les mêmes que celles que doit avoir $\frac{-Y}{X}$, pour que les poids m, M arrivent tous deux en même tems à la verticale. Car lorsque les deux corps arrivent en même tems à la verticale, le rapport de x à y, de dx à dy et de ddx à ddy est toujours constant et égal au rapport de Y à X à P. Or supposons dans ce cas l'indéterminée ν telle que $\frac{1}{\nu} = -\frac{Y}{X}$; il est clair que dans l'équation $-ddx - \nu ddy = ([2-2\nu].x + [2\nu-1].y)\frac{2dt^2}{T^2}$, le premier membre sera zéro: et par conséquent le second devra l'être aussi; ce qui arrivera, ou si l'on a $\frac{2-2\nu}{2\nu-1} = -\frac{y}{x} = -\frac{Y}{X} = \frac{1}{\nu}$, ou bien si on a à la fois $2-2\nu = 0$, et $2\nu-1 = 0$. Or ce dernier cas renfermant contradiction, il s'ensuit que l'équation qui donne la valeur de ν lorsque $\frac{1}{\nu} = -\frac{Y}{X}$, est $\frac{2-2\nu}{2\nu-1} = \frac{Y}{X}$, la même précisément qu'on a trouvée ci-dessus en général, lorsque le rapport de P à Y est quelconque. Donc dans cette dernière équation, la valeur négative de $\frac{1}{\nu}$ doit être égale à la positive de l'équation qui donne le rapport de P à Y, et la positive à la négative.

REMARQUE II.

120. On sent assez que le raisonnement de l'article précédent peut s'appliquer au cas où l'on n'a ni $P = p$, ni $M = m$, ni $L = l$; et en effet, si l'on veut prendre la peine de faire le calcul, on verra que l'équation étant ordonnée par rapport à $\frac{1}{y}$, elle ne différera que par le signe du second terme, de l'équation ordonnée par rapport à $\frac{Y}{X}$.

Car en général les équations (K), (N) de l'article 115, peuvent être représentées par $d\,dx = (ax + by)\,dt^2$, et $d\,dy = (cx + ey)\,dt^2$. Or pour que les corps arrivent en même tems à la verticale, il faut que $ax + by : cx + ey :: x : y$, et pour avoir la valeur de $\frac{y}{x}$, il faut que $a + c\frac{y}{x} = \frac{b + e\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$. Les deux équations ordonnées, l'une par rapport à $\frac{y}{x}$, l'autre par rapport à $\frac{1}{y}$, ne diffèrent que par le signe du second terme.

Il est aisé de voir que la quantité qui est sous le signe radical dans la valeur de $\frac{y}{x}$ (*art.* 116), est toujours réelle. Ainsi les racines de cette équation ne seront jamais égales; donc l'équation en $\frac{y}{x}$ ayant les mêmes ra-

cines en signe contraire que l'équation en $\frac{y}{x}$, il s'ensuit que v n'aura jamais deux racines égales. On peut voir encore très-aisément que la quantité radicale est toujours plus grande que l'autre; d'où il s'ensuit que jamais $\frac{y}{x}$ n'aura une valeur $= 0$, ni par conséquent $\frac{1}{V}$.

REMARQUE III.

121. Au reste, je n'ai considéré dans la solution du problême précédent, le mouvement du poids M, comme composé de deux mouvemens, dont l'un MV lui est commun avec le poids m, l'autre Vv est un mouvement de rotation autour de m comme centre, que pour préparer le Lecteur à la solution de quelques problêmes qui suivront, et que cette considération rend beaucoup plus aisés à résoudre. Car on auroit pu décomposer d'abord l'action de la pesanteur M suivant ML, en deux autres, dont l'une produisît le mouvement Mv du corps M, l'autre suivant MP fût détruite. De cette manière on eût eu la force accélératrice suivant $Mv = \grave{a}\ p \times \sin. LMP = \frac{P.y}{L}$; l'angle $Sm R = \frac{Sm M \times P.M}{p.m} = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}$; donc l'angle RmQ auroit été $= \frac{x}{l} - \left[\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}\right]$, et par conséquent la force accélératrice sui-

vant mu auroit été le produit de p par cette dernière quantité. Ainsi comme x est l'espace que cette dernière force accélératrice tend à faire parcourir au corps m, et $x + y$ celui que la force accélératrice totale du corps M tend à lui faire décrire, on auroit eu

$$-ddx = \left[\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right] dt^2,$$

et $-ddx - ddy = \left[-\frac{Py}{L}\right] dt^2$; deux équations,

dont la première est la même que l'équation (K) de l'article 115, et dont l'autre n'est autre chose que les équations (K) et (N) de ce même article ajoutées ensemble. Cette solution par conséquent revient au même que celle que nous avons donnée *art.* 115.

Remarque IV.

122. Si on appelle x, y les distances des deux corps à la verticale, qui dans la Remarque précédente étoient x et $y + x$, on aura les équations du mouvement des deux corps en mettant dans celles de l'article précédent y au lieu de $x + y$, et par conséquent $y - x$ au lieu de y. Soit de plus $P = p$, a l'espace qu'un corps pesant parcourroit librement en tombant durant le tems T, $\Delta = 2a\left(\frac{1}{l} + \frac{M}{lm} + \frac{M}{Lm}\right)$, $\Gamma = -\frac{2aM}{Lm}$, $\varphi = -\frac{2a}{L}$, $\Pi = \frac{2a}{L}$; on aura (*art.* 118) pour les équations générales du mouvement des deux corps,

$$-ddx = (\Delta x + \Gamma y)\frac{dt^2}{T^2},$$

$$-ddy = (\varphi x + \Pi y)\frac{dt^2}{T^2}.$$

Et en suivant précisément la méthode de l'article 118, on trouvera que les deux valeurs de ν sont $\nu = \frac{-\Delta + \Pi \pm \sqrt{\Pi - \Delta^2 + 4\Gamma\varphi}}{2\varphi}$. Appellons ν, ν', ces deux valeurs, on aura $u = A\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$; $u' = B\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$; $x = \frac{\nu' u - \nu u'}{\nu' - \nu}$; $y = \frac{u - u'}{\nu - \nu'}$; d'où il s'ensuit que si on nomme α et $\mathcal{C}$ les valeurs de x et de y lorsque $t = 0$, on aura $A = \alpha + \nu\mathcal{C}$, $B = \alpha + \nu'\mathcal{C}$,

$$x = \frac{(\nu'\alpha + \nu\nu'\mathcal{C})\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{\nu' - \nu} - \frac{(\nu\alpha + \nu\nu'\mathcal{C})\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\nu' - \nu};$$ et

$$y = \frac{(\alpha + \nu\mathcal{C})\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{\nu - \nu'} - \frac{(\alpha + \nu'\mathcal{C})\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\nu - \nu'}.$$

De là il est facile de trouver une construction qui donne la valeur de x et de y; car soit $x = G \cos. pt + rG \cos. qt$; $y = H \cos. pt + N \cos. qt$; soient décrits (fig. 41) des arcs de cercle des rayons $CA = G$, $CD = H$, $CB = N$, on aura (en faisant l'angle $ACL = pt$, et l'angle $ACF = qt$) $x = CZ + r.CG$, et $y = \frac{CZ \times CD}{CA} + \frac{CG \times CB}{CA} = CA' + CO$.

J'avois donné dans la première édition de cet ouvrage une autre solution du même problême; mais celle-ci est beaucoup plus simple.

Si l'on a $\alpha + \nu\,\epsilon = 0$, ou $\alpha + \nu'\,\epsilon = 0$, c'est-à-dire $\frac{\epsilon}{\alpha} = \frac{-1}{\nu}$ ou $\frac{-1}{\nu'}$, ce qui est le cas des *art.* 116 et 120; alors les valeurs de x et de y seront exprimées chacune par un seul terme, et ces valeurs seront toujours en raison constante; ce qui s'accorde avec ce qui a été remarqué dans l'article 116.

On peut remarquer encore que ce cas est le seul où les valeurs de x et de y se réduisent à un seul terme. Car (*art.* 120) on ne peut jamais supposer ni $\nu = 0$, ni $\nu' = 0$, ni $\nu = \nu'$. Donc il n'y a que le cas de $\alpha + \nu\,\epsilon = 0$, ou celui de $\alpha + \nu'\,\epsilon = 0$, qui puisse rendre nul un des termes de la valeur de x; il en est de même de celle de y.

Comme les quantités ν, ν', ne sont jamais égales

(*art.* 120.) on voit encore que x et y ne peuvent jamais être en raison constante, tant que ces quantités sont composées de deux termes, c'est-à-dire tant que l'on n'a pas $\alpha + \nu\, 6 = 0$, ou $\alpha + \nu' 6 = 0$.

On peut observer enfin que jamais un des termes de la valeur de x et de celle de y ne deviendra constant ; car il faudroit pour cela que $\Delta + \nu\, \varphi$, ou $\Delta + \nu' \varphi$ fût $= 0$; ce qui donneroit $\frac{\Delta}{\varphi} = \frac{\Gamma}{\Pi}$, ou $\frac{L}{l} + \frac{L \cdot M}{l\, m} + \frac{M}{m} = \frac{M}{m}$; équation impossible.

REMARQUE V.

123. Le Lecteur peut comparer cette solution avec celle que M. Daniel Bernoulli a donnée du même problême dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Prusse*, pour l'année 1753, et juger laquelle des deux est la plus simple, et surtout la plus directe.

Je me contenterai de dire que l'on remarque aisément dans les valeurs de x et de y trouvées ci-dessus, la double oscillation, que M. Bernoulli a observée dans le mouvement du pendule dont il s'agit ; chacune de ces oscillations est représentée par chacun des deux termes de la valeur de x et de celle de y. En effet l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur λ, est $-d\,d\,z = \frac{2\,a\,z\,d\,t^2}{\lambda}$, ou $z = K \times$ cos.

cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\frac{2a}{\lambda}}$ —; d'où il est facile de voir que les mouvemens des corps M, m sont composés de deux mouvemeus, synchrones chacun à celui d'un pendule simple. On peut en voir le détail, si on le croit nécessaire, dans le *Mémoire* de M. *Bernoulli*, auquel il suffit de renvoyer. Mais ce qui est important de remarquer, et ce que M. Bernoulli, ce me semble, auroit dû faire, c'est que les deux *oscillations* dont il s'agit, ne sont qu'improprement nommées de la sorte, parce qu'une de ces oscillations se fait par rapport à un point mobile qui oscille lui-même; ainsi les deux oscillations doivent réciproquement s'altérer et se dénaturer, pour ainsi dire; ensorte qu'une partie infiniment petite d'oscillation, qui se fera, par exemple, de gauche à droite par rapport au point mobile, se fera réellement de droite à gauche dans l'espace absolu, si dans ce moment la vîtesse d'oscillation du point mobile est plus grande, et dirigée de droite à gauche; c'est pourquoi il n'y a point proprement dans le pendule une double oscillation, mais une seule par rapport à l'espace absolu. Il est vrai que les oscillations *absolues* des deux corps ne se feront pas toujours en même tems, que l'un pourra faire dans le même tems plus d'oscillations que l'autre; mais chacun en particulier ne fera réellement que des oscillations simples.

REMARQUE VI.

124. Les oscillations du corps m finiront lorsque dx

sera = o, et celles du corps M lorsque $dy = o$; car alors la vîtesse sera nulle; ainsi les oscillations du corps m finiront,

1° Lorsqu'on aura à la fois sin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$, et sin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = o$. Or cela arrivera lorsque $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ sera à $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ combien nombre à nombre, et lorsque t sera tel que $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, et $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ seront un multiple de 180 degrés. Car alors chacun des sinus de ces angles sera = o.

2°. Lorsque l'on aura $\frac{\text{sin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{sin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = \frac{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}.\nu'.(\alpha + \nu'G)}{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}.\nu.(\alpha + \nu G)}$. Cette seconde équation seule aura lieu lorsque $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$, et $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ ne seront pas comme nombre à nombre.

De même les oscillations du corps M finiront,

1°. Lorsque t aura la valeur désignée dans le premier des deux cas précédens.

2°. Lorsque l'on aura $\frac{\text{sin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{sin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = \frac{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}(\alpha + \nu G)}{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}(\alpha + \nu' G)}$.

Donc 1°. lorsque l'on aura $\nu' \alpha + \nu \nu' \mathcal{C} = 0$, et $\alpha + \nu \mathcal{C} = 0$, ce qui se réduit à $\alpha + \nu \mathcal{C} = 0$, toutes les oscillations des deux corps finiront en même tems; il en est de même si $\alpha + \nu' \mathcal{C} = 0$. Il est aisé de voir (*art.* 128) que ces deux cas sont celui de l'article 116.

2°. Lorsque $\sqrt{\Delta + \nu \varphi}$, et $\sqrt{\Delta + \nu' \varphi}$ ne sont pas comme nombre à nombre, les vibrations des corps M et m ne finiront jamais en même tems. Car la valeur de $\frac{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu' \varphi}}{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu \varphi}}$ pour le corps m est à la valeur de la même quantité pour le corps M, comme ν' est à ν. Or ν' n'est jamais égale à ν (*art.* 120). Donc il est impossible que la même valeur de t rende à la fois $dx = 0$, et $dy = 0$.

3°. Si $\sqrt{\Delta - \nu \varphi}$, et $\sqrt{\Delta + \nu' \varphi}$ sont entr'eux comme nombre à nombre, quelques oscillations des deux corps finiront en même tems, savoir lorsqu'on aura à la fois $\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu \varphi} = 0$, et $\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu' \varphi} = 0$; mais si les deux équations qui donnent la valeur de $\frac{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu' \varphi}}{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu \varphi}}$ ont une solution possible, ou si une des deux seulement est dans cecas; alors toutes les oscillations des deux corps ne finiront pas en même tems. Il est à remarquer que la

solution des équations précédentes sera impossible, non-seulement si l'inconnue a une valeur imaginaire, mais si elle a une valeur (positive ou négative) plus grande que l'unité, parce que le sinus d'un angle quelconque ne peut être plus grand que le sinus total. Si une des deux équations seulement a une solution possible, celui des deux corps à qui elle appartiendra (par exemple m) fera plus de vibrations que l'autre; mais toutes les fois qu'une vibration du corps M cessera, il y aura une vibration cessante dans le corps m.

4°. Enfin toutes les oscillations des deux corps finiront en même tems, si $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, et $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ sont entr'eux comme nombre à nombre, et si les deux équations qui donnent la valeur de $\frac{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}$ n'ont point de solution possible. Soit par exemple $\frac{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = 2$, on a $t\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = 2t\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, et $\frac{\sin. \frac{2t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{\sin. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = 2 \cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$; donc on a à la fois $2 \cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = \frac{\nu'(\alpha + \nu\mathcal{C})}{2\nu(\alpha + \nu'\mathcal{C})}$ et $\frac{\alpha + \nu\mathcal{C}}{2(\alpha + \nu'\mathcal{C})}$: or, comme les quantités α et $\mathcal{C}$ sont

tout-à-fait indépendantes de l'équation $\frac{\sqrt{\Delta + \nu' \phi}}{\sqrt{\Delta + \nu \phi}} = 2$,

puisque α et ϵ n'entrent point dans cette équation, il est évident qu'on peut supposer $\alpha + \nu' \epsilon$ si petit (sans être absolument $= 0$) que les deux quantités $\frac{\alpha + \nu \epsilon}{2(\alpha + \nu' \epsilon)}$ et $\frac{(\alpha + \nu \epsilon)\nu'}{2\nu(\alpha + \nu' \epsilon)}$ soient plus grandes que 2, et par conséquent que $2 \cos. \frac{t}{T} \sqrt{\Delta + \nu \phi}$.

Il est donc évident que le premier des cas ci-dessus, qui est le même que celui de l'article 116. n'est pas le seul où les vibrations des deux corps soient synchrones, c'est-à-dire commencent et finissent toutes en même tems. Remarque d'autant plus importante qu'il semble qu'on ait cru jusqu'ici le contraire.

REMARQUE VII.

125. En faisant de même les valeurs de $x = 0$, $y = 0$, on trouvera les cas où les deux corps arriveront dans la situation verticale, et ceux où ils y arriveront en même tems. On pourra s'assurer aisément qu'il y a d'autres cas que celui de l'article 116, ou les demi-vibrations de chaque corps, (j'appelle ainsi les vibrations terminées à la verticale) finiront toujours en même tems. Car si on a par exemple $\frac{\sqrt{\Delta + \nu' \phi}}{\sqrt{\Delta + \nu \phi}} = 3$,

on a cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}=$ cos. $\frac{3t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}$; donc si cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}=u$, cos. $\frac{3t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}=4u^3-3u$; en ce cas si cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}=0$, on aura aussi cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}=0$. Et il faudra pour que toutes les demi-vibrations finissent en même tems, que $4uu-3$ ne puisse être égal à $\frac{\nu'(\alpha+\nu\mathcal{C})}{\nu(\alpha+\nu'\mathcal{C})}$ ni à $\frac{\alpha+\nu\varphi}{\alpha+\nu'\mathcal{C}}$; or c'est ce qui arrivera si on prend par exemple, α et $\mathcal{C}$ tels que $\alpha+\nu'\mathcal{C}$ soit fort petit, sans être absolument zéro; et ce seul cas fait voir qu'il y a une infinité d'autres semblables qui ne sont pas moins possibles.

Le premier des quatre cas de l'*art.* 124 n'est pas non plus le seul où les vibrations et demi-vibrations soient à la fois synchrones. Car soit par exemple $\frac{\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}=m$, m étant un nombre entier impair; il est clair que sin. $\frac{t\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}{T}=0$, rendra sin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}=0$; car alors on aura $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}=$ à un certain nombre de fois la demi-circonférence, et par conséquent aussi $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}$, ou $\frac{mt}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}=$ à un certain nombre de fois la demi-conférence. Dans ce

même cas il est aisé de voir que cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$, donnera aussi cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = o$; car alors $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ sera égal à 90 degrés pris un nombre impair de fois ; donc il en sera aussi de même de $\frac{mt}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$. Donc en ce cas les vibrations totales, et les demi-vibrations finiront toutes en même tems, si les autres conditions énoncées plus haut dans cet article 125 et dans l'*art.* 124 précédent, sont observées, par exemple, si $\alpha + \nu'\mathcal{C}$ est très-petit etc.

REMARQUE VIII.

126. Si les deux corps avoient une vîtesse initiale, ensorte que $\frac{-dx}{dt}$ fût $= g$, et $\frac{-dy}{dt} = h$; les équations ne seroient guères plus difficiles à intégrer. On considérera pour lors que dx étant $= \frac{\nu' du - \nu du'}{\nu' - \nu}$ et dy étant $= \frac{du - du'}{\nu - \nu'}$, on aura les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du'}{dt}$ lorsque $t = o$, et ces valeurs seront exprimées par une équation fort simple en g et en h ; soit donc $\frac{-du}{dt} = \eta$ et $\frac{-du'}{dt} = \gamma$ lorsque $t = o$,

et l'équation $-ddu = Kudt^2$ donnera $\frac{-du^2}{dt^2} + v^2 = Kuu - KAA$, A étant la valeur connue de u lorsque $t = 0$; donc $dt\sqrt{K} = \frac{-du}{\sqrt{\frac{v^2}{K} + AA - uu}}$: donc si on appelle δ l'angle dont le cosinus est A, et le sinus $\frac{v}{\sqrt{K}}$, on aura $u = \cos.(t\sqrt{K} + \delta) = \cos.\delta \cos. t\sqrt{K} - \sin.\delta \sin. t\sqrt{K}$; d'où il est aisé de voir que u sera $= A \cos. t\sqrt{K} - \frac{v}{\sqrt{K}} \sin. t\sqrt{K}$; on trouvera de même la valeur de u'.

COROLLAIRE IV.

127. En général, si un fil $CMm\mu$ (Fig. 42) est chargé de tant de poids M, m, μ etc. qu'on voudra, infiniment peu éloignés de la verticale, on peut toujours déterminer la force accélératrice de chacun de ces Corps, par l'une des deux solutions données *art.* 115 et 121, pour le cas de deux Corps.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois Corps M, m, μ, dont les pesanteurs P, p, π suivant MA, ma, $\mu\alpha$, se décomposent chacune en deux autres, dont les unes soient les forces accélératrices des corps M, m, μ suivant MV, mu, $\mu\upsilon$; les autres, dirigées suivant MB,

$MB, mb, \mu Z$, se fassent équilibre; et que les fils CM, $M m$, $m \mu$, soient prolongés suivant MR, mr, μZ; il est clair que les puissances suivant μZ, mb, qui doivent être censées égales aux poids des corps μ, m, doivent se réduire à une puissance suivant mr, qui peut être regardée comme égale à leur somme; que de même la puissance suivant mr ou Mm, et la puissance suivant MB qui doit être censée égale au poids du corps M, doivent se réduire à une pnissance suivant MR. On aura donc la force accélératrice du corps $\mu = \pi$. angl. $Z \mu \alpha$; celle du corps $m = p$ [angl. rma — angl. $\frac{rm\mu . \pi . \mu}{p . m}$]; celle du corps $M = P$ [angl. RMA — angl. $\frac{RMm \times (p.m + \pi.\mu)}{P.M}$].

En général il est visible, que si pour simplifier le calcul, on suppose toutes les pesanteurs égales à une même quantité g qu'on prendra pour l'unité, et qu'on appelle p, q, r, s etc. les angles MCO, mMR, μmr etc. et B, C, D, E etc. les masses à commencer de haut en bas, les forces accélératrices seront par ordre à commencer du corps le plus bas :

$$p + q + r + s$$

$$p + q + r - \frac{sE}{D}$$

$$p + q - r . \left[\frac{E + D}{C}\right]$$

$$p - q . \left[\frac{E + D + C}{B}\right].$$

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli*, Tom. VII. des *Mémoires de Pétersbourg*, p. 170.

COROLLAIRE V.

128. Supposons que le fil ne soit chargé que de trois corps égaux entr'eux, dont x, y et z soient les distances à la verticale à commencer par le plus haut; et que les portions du fil interceptées entre ces corps, soient égales : si on veut que ces corps arrivent en même tems à la verticale, il faut faire $x : y :: p - 2q : p + q - r$, et $z : y :: p + q + r : p + q - r$; où (mettant pour p, q, r, leurs proportionnelles x, $y - 2x$, $z - 2y + x$)

$$x : y :: 5x - 2y : 3y - 2x - z;$$

$$\text{et } z : y :: z - y : 3y - 2x - z;$$

donc $(3y - 2x - z).z = (z - y).y$, et $(3y - 2x - z).x = (3x - 2y + 2x).y$; donc $z = -5y + \frac{2yy}{x} + 3y - 2x = \frac{2yy}{x} - 2y - 2x$, et $y.(\frac{2yy}{x} - 3y - 2x) = (\frac{-2yy}{x} + 5y)(\frac{2yy}{x} - 2y - 2x)$; d'où l'on tire $\frac{2yy}{x} - 3y - 2x = -\frac{4y^3}{xx} + \frac{4yy}{x} + 4y + \frac{10y^2}{x} - 10y - 10x$: divisant le tout par x, et ordonnant l'équation par rapport à $\frac{y}{x}$, on aura $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 8 = 0$, ce qui est conforme à ce qu'a trouvé M. *Bernoulli*, *Mé-*

moires de Pétersbourg, Tom. VI. p. 112, où il nomme 1 ce que nous avons appellé x, et x ce que nous avons nommé $\frac{y}{x}$.

REMARQUE IX.

129. En général, quel que soit le nombre des corps et la distance des uns aux autres, si on veut qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, les distances du troisième et quatrième etc. à la verticale, se trouveront toujours par des équations linéaires en $\frac{y}{x}$. De plus l'équation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ sera d'un degré égal à l'exposant du nombre des corps, et aura toutes ses racines réelles. Car il est visible que s'il y a trois corps par exemple, et qu'on suppose celui qui est le plus haut placé à une très-petite distance de la verticale, on pourra toujours trouver trois situations pour chacun des deux autres corps, pour qu'ils arrivent à la verticale tous deux en même tems que le premier; savoir, en les mettant, ou tous deux du même côté de la verticale que le premier, ce qui fait un cas; ou l'un du même côté, et l'autre du côté opposé, ce qui fait deux cas. En général, la situation du premier corps étant donnée, le second corps et les autres ont toujours autant de situations possibles, qu'il y a de corps; donc $\frac{y}{x}$ a toujours autant de valeurs réelles qu'il y a de corps; et ainsi

l'équation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ aura toujours toutes ses racines réelles. Donc la distance infiniment petite du corps supérieur à la verticale étant donnée, chacun des autres corps pourra avoir autant de situations différentes qu'il y a de corps en tout.

COROLLAIRE VI.

130. Les mêmes choses étant supposées que dans le Corollaire V. si on veut avoir le mouvement de chaque corps en particulier, sans s'embarrasser qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, on aura les trois équations

$$-ddx = (5x - 2y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (S)$$

$$-ddy = (3y - 2x - z) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (T)$$

$$-ddz = (z - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (V).$$

Pour intégrer ces équations, je multiplie la seconde par ν, la troisième par μ, et je les ajoute ensemble : j'aurai $-ddx - \nu ddy - \mu ddz = [(5 - 2\nu) \cdot x + (3\nu - 2 - \mu) \cdot y + (\mu - \nu) \cdot z] \frac{2dt^2}{T^2}$; je sais $5 - 2\nu = \frac{-2 + 3\nu - \mu}{\nu} = \frac{\mu - \nu}{\mu}$, ce qui donne $\mu = -2 + 3\nu - 5\nu + 2\nu\nu = 2\nu\nu - 2\nu - 2$, et $(5 - 2\nu) \cdot (2\nu\nu - 2\nu - 2) = 2\nu\nu - 3\nu - 2$; d'où l'on tire l'équation $\frac{8}{\nu^3} + \frac{3}{\nu^2} - \frac{12}{\nu} + 4 = 0$.

Si on ordonne cette dernière équation par rapport à ν, on trouvera qu'elle est la même que l'équation $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 8 = 0$ trouvée ci-dessus art. 128, et qu'ainsi (*art.* 129) elle a toutes ses racines réelles; ce que nous prouverons d'ailleurs d'une autre manière dans l'article suivant.

Soient donc ν, ν', ν'' les trois racines de cette équation, on aura $\mu = 2\nu\nu - 2\nu - 2$; $\mu' = 2\nu'\nu' - 2\nu' - 2$; $\mu'' = 2\nu''\nu'' - 2\nu'' - 2$; et supposant $x + \nu y + \mu z = u$, $x + \nu' y + \mu' z = u'$, $x + \nu'' y + \mu'' z = u''$, on aura les trois équations $-ddu = (5 - 2\nu).\frac{2u\,dt^2}{T^2}$; $-ddu' = (5 - 2\nu').\frac{2u'\,dt^2}{T^2}$; $-ddu'' = (5 - 2\nu'').\frac{2u''\,dt^2}{T^2}$; d'où l'on tire comme dans l'article 118, les valeurs de u, u', u'', et par conséquent celles de x, y, z.

On résoudra le problème de la même manière, quel que soit le nombre des corps, et le rapport de leurs masses.

REMARQUE X.

131. Quand l'équation en ν n'auroit pas toutes ses racines réelles, il est aisé de voir que la solution ne réussiroit pas moins. Car comme les quantités variables x, y, z etc. doivent évidemment avoir des valeurs réelles exprimées en t, les imaginaires, s'il y en a, se

détruiroient dans les expressions de ces quantités. En effet j'ai démontré ailleurs que toute quantité imaginaire donnée, et toute racine imaginaire d'une équation se réduit à la forme $\alpha + 6\sqrt{-1}$, α et 6 étant des grandeurs réelles. Donc dans le cas même ou r auroit toutes ses racines imaginaires, les équations en u, u', etc. pourroient être réduites à cette forme $-ddu = (+\alpha + 6\sqrt{-1})\, u\, dt^2$, dont l'intégrale (*) est $u = A\, c^{(\delta + \epsilon\sqrt{-1})t} + B\, c^{-(\delta+\epsilon\sqrt{-1})t}$: or on sait que $c^{z\sqrt{-1}} = \cos. z \pm \sqrt{-1} \times \sin. z$, et que $c^{-z\sqrt{-1}} = \cos. z \mp \sqrt{-1}\ \sin. z$. Donc $u = A\, c^{\delta t} \times (\cos. \epsilon t \pm \sqrt{-1}\ .\ \sin. \epsilon t) + B\, c^{-\delta t} \times (\cos. \epsilon t \mp \sqrt{-1}\ .\ \sin. \epsilon t)$. Il en sera de même des valeurs de u', de u'' etc. Donc les valeurs de x, y, z etc. ne pourront jamais contenir tout au plus, que des quantités de cette forme $c^{\delta t}$, $\sin. \epsilon t$, $\cos. \epsilon t$, avec des coefficiens réels ou imaginaires; et comme il faut que les valeurs de x, y, z etc. soient réelles, et que la solution donnée étant générale, doit infailliblement faire trouver ces valeurs, il s'ensuit que les imaginaires (s'il y en a) devront nécessairement se détruire.

Mais on peut prouver aisément par la valeur même de u qu'il n'y aura jamais d'imaginaires. Car les équa-

(*) *Voyez* les Mémoires de l'Académie de Berlin, 1748 et 1750.

tions $x + \nu y + \mu z = u$ etc. prouvent que les valeurs de u, u' etc. sont formées des valeurs de x, y, z. Or lorsque $t = 0$, on doit avoir $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, parce que les corps sont supposés partir du repos. Donc aussi lorsque $t = 0$, on doit avoir $du = 0$, $du' = 0$ etc. Donc on aura $\delta A - \delta B \pm \epsilon\sqrt{-1} \times A \mp \epsilon\sqrt{-1} \cdot B = 0$. Donc on aura, ou $A = B$, ou $\delta = 0$ et $\epsilon = 0$. Or je vais prouver que δ doit être nécessairement $= 0$. En effet les valeurs de x, de y et de z etc. doivent toujours être extrêmement petites, par la nature du problême, puisqu'il est clair que chacun des corps ne peut faire que des oscillations de peu d'étendue; ainsi les valeurs de x, y, z etc. ne peuvent renfermer des quantités de l'espèce $c^{\delta t}$, parce qu'alors elles croîtroient à l'infini; donc u ne doit pas en renfermer non plus : donc $\delta = 0$. Donc $u = (A + B) \cos. \epsilon t \pm (A - B)\sqrt{-1} \sin. \epsilon t$; et comme u ne doit point avoir de valeur imaginaire, il s'ensuit que $(A - B)\sqrt{-1} \sin. \epsilon t = 0$; donc $A = B$. Donc puisque $u = (A + B) \cos. \epsilon t$, on aura $\frac{d\,du}{u\,dt^2} = -\epsilon^2$; donc l'équation différentielle en u ne contiendra jamais d'imaginaires; et comme le coefficient de u dans cette équation ne renferme d'indéterminée que ν, il s'ensuit que la valeur de ν sera toujours réelle.

Au reste il est visible que dans le cas où il y a plus de deux corps, on peut faire sur leurs mouvemens et

leurs vibrations plusieurs remarques, analogues à celles que nous avons faites sur le mouvement du fil chargé de deux corps : mais ce détail nous meneroit trop loin.

REMARQUE XI.

132. Si on suppose que les corps attachés au fil se meuvent dans un milieu dont la résistance soit proportionnelle à $\gamma + \delta u$, γ et δ étant des constantes quelconques, et u la vîtesse, en ce cas les équations pourroient encore s'intégrer. Par exemple supposons pour simplifier le calcul, qu'il n'y ait que deux corps égaux, on aura (*art.* 118) $-ddx = \left(\frac{2px - py}{l} - \frac{\gamma}{M} + \frac{\delta dx}{M dt}\right) \frac{2l\,dt^2}{pT^2}$; et $ddy = \left(\frac{2py - 2px}{l} - \frac{\gamma'}{M} + \frac{\delta' dy}{M dt}\right) \frac{2l\,dt^2}{pT^2}$; équations qui peuvent s'intégrer par différentes méthodes, que j'ai expliquées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour les années 1748 et 1750. C'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

COROLLAIRE VII.

133. Soit une courbe chargée de poids infiniment petits et égaux, placés à des distances infiniment petites les unes des autres, et tous infiniment peu éloignés de la verticale; soient x les abscisses, y les ordonnées infiniment petites de cette courbe, s les arcs, qui différent infiniment peu des x correspondantes, enfin l la longueur du

du fil, il suit de l'*art.* 127. que la force accélératrice de chaque petit poids, est comme la somme des sinus des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport des poids inférieurs à ce poids; donc cette force est pour chaque point (37) $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s).ddy}{ds^2}$; ce qui s'accorde avec ce que M. *Daniel Bernoulli* a trouvé dans le Tom. VII. des *Mémoires de Pétersbourg*, p. 171.

M. *Daniel Bernoulli* a tiré de-là l'équation que doit avoir la courbe, pour que toutes ses parties arrivent en même tems à la verticale. *Voy. ibid.* p. 171.

L'équation de cette courbe est en général $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2} = -\frac{y}{n}$ (38); faisant $l - s = x$, $y = c^{\int p\,dx}$, et $p\,x = z$, on parvient à l'équation

(37) On prend $\frac{ddy}{ds}$ pour l'angle de contingence, quoique cet angle ait pour expression générale $\frac{dx.ddy}{ds} \times \frac{1}{ds}$; mais comme on suppose tous les points de la corde infiniment près de la verticale, dx et ds peuvent être pris l'un pour l'autre.

(38) L'équation de la courbe est $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2} = \frac{y}{n}$; parce que la force accélératrice est représentée par $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2}$, et que cette force étant supposée proportionnelle à l'espace y qui reste à parcourir jusqu'à la verticale, tous les points de la courbe arriveront à cette verticale en même tems.

$n\,dz + \frac{u\,z\,z\,dx}{x} = -dx$, qui tombe dans le cas de *Ricati*, et qui n'est pas intégrable par les méthodes connues; ce qui est d'autant plus singulier, que si on fait $x = k\,u^m$, k et m étant des constantes à volonté, on aura $n\,u\,dz + n\,m\,z\,z\,du + k\,m\,u^m\,du = 0$, équation qui n'est guères plus composée que la précédente, et dont je n'ai pû cependant séparer les indéterminées, quoique les deux quantités k, m, puissent être telles qu'on voudra, pourvu qu'elles ne soient pas zéro.

Si la courbe n'a pas cette équation, alors elle changera d'équation d'un instant à l'autre, et la valeur générale d'une ordonnée y, ne pourra être exprimée que par une fonction de l'arc s ou de l'abscisse x correspondante, et du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; cette fonction, lorsque $t = o$, deviendra la valeur de y en s donnée par l'équation de la première courbe (39). Soit donc en général

---

(39) Quand on suppose que tous les points de la courbe doivent arriver en même tems à la verticale, il suffit pour avoir toutes les figures qu'elle formera successivement, d'avoir par le moyen de l'équation dont on a parlé ci-dessus, la figure initiale; en effet les ordonnées de l'une de ces figures quelconque, ont un rapport constant avec les ordonnées de la première, ensorte qu'il suffit de déterminer au bout d'un tems quelconque t, quelle doit être la valeur de l'une d'entr'elles, c'est à quoi on satisfait aisément en intégrant l'équation $-d\,dy' = \frac{y'\,dt^2}{n}$, y' étant l'ordonnée qui dans la nouvelle courbe répond au même point de la corde que y dans la première. Mais lorsque tous les points de la courbe ne sont

$y = (*)\ \varphi(t.s)$, $dy = p\,dt + q\,ds$, $-\mathrm{d}\,\mathrm{d}y$ la différence seconde de y, en faisant s constante, (je mets $-\mathrm{d}\,\mathrm{d}y$, parce que t croissant y diminue, et que la vîtesse augmente) $d\,dy$ la diff. seconde en prenant t constante; on a $-\mathrm{d}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s).\frac{ddy}{ds^2}\right].dt^2$, ou $\frac{-dp}{dt} = q - (l-s).\frac{dq}{ds}$ (40); on observera

---

pas supposés devoir arriver en même tems à la verticale, alors la figure initiale étant donnée, les figures qu'elle doit prendre successivement ne peuvent plus en être déduites si aisément. Néanmoins on voit assez que la position d'un point quelconque de la corde au bout d'un tems quelconque t, ne peut dépendre que de ces trois choses, de la longueur de la partie à l'extrémité de laquelle ce point est placé, du tems depuis lequel tous les points sont en mouvement, et de la figure initiale. Donc l'équation générale qui donnera la valeur de y doit renfermer l'équation de la figure primitive, et doit être telle par conséquent que si on fait $y = \varphi(t.s)$, cette équation soit celle de la figure primitive, en y supposant $t = 0$.

(*) Cette quantité $\varphi(t.s)$ exprime en général une fonction de t et de s.

(40) On a vu ci-dessus que la force accélératrice d'un point quelconque de la courbe étoit $\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{ddy}{ds^2}$; donc pour avoir le mouvement de ce point il faut faire $\left(\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{ddy}{ds^2}\right)dt^2$ égal au petit espace que cette force tend à faire parcourir à ce point dans le tems dt, c'est-à-dire égal à la difference seconde de l'ordonnée y; or cette difference doit être prise en supposant s constante, puisque le point dont on considere ici le mouvement est supposé ne point changer de place sur la corde. Au contraire dans la quantité $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2}$, dy et ddy doivent être pris en supposant s variable et t constant, parce que cette quantité marque pour un même tems, pour une même position de la corde, la force accélératrice de chacun de ses points.

que dp doit être prise en ne faisant varier que t, et dq en ne faisant varier que s. Soit $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, $dq = b\,dt + m\,ds$; à cause que $p\,dt + q\,ds$ est une différentielle complette, il faut que $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire $b = \nu$. De plus, l'équation $\frac{-dp}{dt} = q - \frac{(l-s).dq}{ds}$ donne $-\alpha = q - (l-s).m$; donc $m\,ds = \frac{q\,ds + \alpha\,ds}{l-s}$: ajoutant de part et d'autre $b\,dt$ ou $\nu\,dt$, on aura $m\,ds + b\,dt$ ou $dq = \frac{q\,ds + \alpha\,ds}{l-s} + \nu\,dt$. Donc $dq.(l-s) - q\,ds = \nu\,dt.(l-s) + \alpha\,ds$, et $q.(l-s) = \int \nu\,dt.(l-s) + \alpha\,ds$. Cette équation doit avoir lieu, en cas que toutes les courbes variables dont il s'agit, puissent être renfermées dans l'équation générale $y = \varphi(t.s)$.

REMARQUE XII.

134. On remarque une analogie singulière entre la fonction $\varphi(t.s)$ qui doit exprimer y, et les différentielles de cette fonction à l'infini. Soit $l - s = u$, on aura 1°. $p\,dt - q\,du$ une différentielle complette. 2°. $\frac{-dp}{dt} = q + \frac{u\,dq}{du}$, ou $\frac{-dp}{dt} = \frac{d(qu)}{du}$, et par conséquent $qu\,dt - p\,du$ une différentielle complette; de plus, en faisant encore $l - s = u$, il résulte du Corollaire précédent que $\alpha\,dt - \nu\,du$, et

$\nu u dt - \alpha du$ seront des différentielles complettes, dont la seconde sera $= d(q.\overline{l-s})$ ou $d(qu)$: donc si on fait $dy = p dt - q du$, $dp = \alpha dt - \nu du$, $d\alpha = \varrho dt - \omega du$ etc. et ainsi à l'infini, on aura les différentielles complettes deux à deux,

$p dt - q du$; $\alpha dt - \nu du$; $\varrho dt - \omega du$; etc.
et et et
$q u dt - p du$; $u dt - \alpha du$; $\omega u dt - \varrho du$;

et ainsi à l'infini; de sorte que si on trouve un seul cas d'intégrabilité, on pourra en remontant, en trouver d'autres à l'infini. Par exemple soit $\varrho = A + Bt$, et $\omega = C + Du^{-1}$, on trouvera que $\varrho dt - \omega du$ est égal à une différentielle complette, et que $\omega u dt - \varrho du$ est aussi une différentielle complette, pourvu que $C = -B$. De plus comme on a trouvé $d(qu) = \nu u dt - \alpha du$, on aura de même $d(\nu u) = \omega u dt - \varrho du$; donc α ou $\int \varrho dt - \omega du = At + \frac{Btt}{2} - Bu + D.\text{Log.}\, u + E$, et $\nu = \frac{Dt}{u} - A - Bt + \frac{F}{u}$; on trouvera de la même manière p et q au moyen des valeurs de α, ν; et toutes les quantités qu'on trouvera ainsi deux à deux en remontant, et que je nomme en général P et Q, seront telles que $Pdt - Qdu$, et $Qudt - Pdu$ seront des différences complettes. C'est pourquoi le problême dont il s'agit, sera résolu *analytiquement* pour une infinité de cas. Je dis *analytiquement*, et non relativement à la question présente;

car il faut avouer qu'aucune de ces solutions ne pourra représenter la courbe cherchée. 1°. Parce que ces solutions donnant des termes où t se trouve seule, y croîtroit à l'infini, à mesure que t croîtroit, ce qui ne sauroit être ici par l'hypothèse. 2°. Parce que ces solutions renfermeroient encore des termes de cette forme D. Log. u, qui sont infinis lorsque $u = 0$, c'est-à-dire lorsque s est égale à toute la longueur de la corde.

REMARQUE XIII.

135. C'est pour la même raison qu'on ne sauroit supposer $y = S + S' t^2 + S'' t^4$ etc. S, S', S'' étant des fonctions indéterminées de s; car quoique l'on trouve assez facilement par le calcul les valeurs de S, S', S'', etc. les valeurs de y qui en résulteroient auroient le même inconvénient que la précédente, par rapport à la solution du problème en question (41).

Si on fait $y = T.S$, T étant une fonction inconnue de t, et S une fonction aussi inconnue de s, l'équation $\frac{-dp}{dt} = q - \frac{(l-s)\,dq}{ds}$ donner $- \frac{ddT}{dt^2} \times S =$

(41) Car si on substitue à y cette valeur dans l'équation $-$ d d $y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s)\,\frac{ddy}{ds^2}\right] dt^2$, en observant de prendre les différences de la manière qu'on a déja dit, et qu'on égale à zéro les termes affectés d'une même puissance de t, on trouvera que l'équation qui détermineroit S'' est $\frac{ddS''}{dS''} = \frac{ds}{l-s}$. Les autres suppositions que l'on fait pour y se vérifient à peu près de la même manière.

$\frac{T\,dS}{ds} - \frac{(l-s)\,T\,ddS}{ds^2}$; d'où l'on tire $\frac{-ddT}{T\,dt^2} = \frac{1}{n}$; et $\frac{S}{n} = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{ddS}{ds^2}$. La seconde équation est celle de la corde dont tous les points arrivent en même tems à la verticale, et la première donne $T = A\cos.\frac{t}{\sqrt{n}}$, dT devant être = o lorsque t = o. Ainsi cette équation n'apprend encore rien, puisqu'elle ne fait trouver les vibrations que dans le cas où la corde a une figure telle que tous ses points arrivent en même tems à la situation verticale.

On pourroit aussi supposer $y = T.S + T''S''$, et faire $\frac{-d\,d\,T}{T''\,dt^2} = m$; $\frac{-d\,d\,T''}{T\,dt^2} = m''$, m et m'' étant des constantes positives indéterminées, et ensuite supposer $S\,m = \frac{dS''}{ds} - (l-s)\frac{ddS''}{ds^2}$, et $S''\,m'' = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{d\,d\,S}{ds^2}$; mais cette méthode donneroit une équation différentielle du quatrième ordre pour la valeur de S''. De plus il faudroit que les valeurs de T et de T'' fussent telles, 1°. Que y fût toujours très-petit. 2°. Que y fût = o lorsque s = o. 3°. Que t = o donnât dy = o. Or il est assez facile de s'assurer que les valeurs de T et de T'' tirées des équations $\frac{d^4\,T''}{m''} = m\,T''\,dt^4$, et $T = \frac{-d\,d\,T''}{m''\,dt^2}$,

ne peuvent satisfaire à toutes ces conditions à la fois. Car en intégrant la première de ces équations par les méthodes enseignées dans les *Mémoires de Berlin* 1748 et 1760, on verra que T'' contiendra des quantités de cette forme $c^{\delta t}$, δ étant une quantité réelle. Donc toutes les méthodes proposées jusqu'ici ne peuvent servir à trouver la valeur de y.

REMARQUE XIV.

136. Mais voici une méthode qui peut réussir dans plusieurs cas. Soit $y = TS + T'S' + T''S''$ etc. et soit $\frac{-ddT}{Tdt^2} = n$, $\frac{-ddT'}{T'dt^2} = m$, $\frac{-ddT''}{T''dt^2} = r$ etc. $n, m, r,$ étant des quantités différentes, on aura $y = AS\cos. t\sqrt{n} + BS'\cos. t\sqrt{m} + CS''\cos. t\sqrt{r}$ etc. et on déterminera S, S', S'' etc. par les équations suivantes qui ne peuvent être intégrées que par les séries

$$Sn = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{ddS}{ds^2}$$

$$S'm = \frac{dS'}{ds} - (l-s)\frac{ddS'}{ds^2}$$

$$S''r = \frac{dS''}{ds} - (l-s)\frac{ddS''}{ds^2} \text{ etc.}$$

Mais il faudra pour cela que l'équation primitive de la courbe, lorsque $t = 0$, soit $y = A.S + B.S' + C.S''$ etc. Ainsi le problème ne peut être résolu par cette méthode que dans certains cas particuliers.

REMARQUE

REMARQUE XV.

137. Pour faire avec précision les calculs précédens, il faut mettre l'équation sous cette forme

$$-\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s)\,\frac{ddy}{ds^2}\right].\,\frac{2\,a\,dt^2}{\theta^2},$$

θ étant le tems qu'un corps pesant mettroit à descendre de la hauteur a; et on aura $y = A\,S\cos.\,\frac{t\sqrt{n}}{\theta} + B\,S'\cos.\,\frac{t\sqrt{m}}{\theta}$ etc. et $\frac{s\,n}{2\,a} = \frac{dS}{ds} - (l-s)\,\frac{ddS}{ds^2}$; etc.

M. Daniel Bernoulli prétend (*Mém. de l'Académie de Berlin*, 1753. pag. 194) que la corde vibrante ne peut jamais reprendre sa première position, excepté dans le seul cas de $y = A\,.\,S\cos.\,\frac{t\sqrt{n}}{\theta}$, c'est-à-dire, dans le cas où toutes les vibrations (pour parler le langage de ce grand Géomètre) sont simples et d'une seule et même espèce. Pour que cette proposition fût hors de doute, il faudroit avoir prouvé, 1°. que les quantités m, n etc. à l'infini sont incommensurables entr'elles, ce que M. Bernoulli ne paroît point avoir fait. Il est vrai qu'il trouve que ces quantités sont les racines d'une équation composée d'une infinité de termes, mais cela ne suffit pas, ce me semble, pour établir leur incommensurabilité mutuelle. Or si elles ne sont pas incom-

mensurables, et que $\sqrt{m}$ par exemple soit $= q\sqrt{n}$, q étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, il est aisé de voir que la chaîne reprendra sa première forme, quand $\frac{t\sqrt{n}}{\theta}$ et $\frac{q\,t\sqrt{n}}{\theta}$ seront chacun un multiple de 360 degrés. 2°. Il faudroit de plus avoir prouvé que l'équation $y = T.S + T'S' + \text{etc.}$ ou $y = A.S\cos.\frac{t\sqrt{n}}{\theta} + B.S'\cos.\frac{t\sqrt{h}}{\theta}$ etc. est la seule qui puisse exprimer la corde vibrante. Or c'est de quoi on n'est nullement assuré.

REMARQUE XVI.

138. Nous avons vu ci-dessus (*art.* 125) que le cas de l'art. 116 n'est pas le seul où tous les poids dont un fil est chargé arrivent en même tems à la verticale, et fassent leurs oscillations en même tems. Il pourroit donc très-bien se faire que l'équation trouvée (*art.* 133) ne fût pas la seule qui rendît synchrones les vibrations de la chaîne. Mais il est difficile de prononcer là-dessus, faute d'avoir d'une manière générale et complette l'équation de la chaîne vibrante.

LEMME VIII.

139. *Soit un corps* CRM (Fig. 43) *de figure quelconque, dont le centre de gravité soit* G, *et que je considérerai pour plus de facilité comme une figure plane; que toutes les parties* V *de ce corps soient animées par des*

forces V M *dont les directions soient perpendiculaires à la ligne* V C, *menée des points* V *à un point fixe* C, *pris à volonté dans le corps, et que ces forces soient entr'elles comme les distances* V C ; *je dis que la direction de la force résultante sera une ligne* K L *perpendiculaire à la droite* C G *menée par* G, *et par le point donné* C.

Car décomposant chaque force VM en deux, l'une suivant VN parallèle à CG, l'autre suivant VP perpendiculaire à CG ; il est aisé de voir que les forces suivant VN seront comme les distances CQ de ces forces à la ligne CG, qu'ainsi les sommes de ces forces seront égales à la somme des produits de chaque particule par sa distance à la ligne CG. Mais comme CG passe par le centre de gravité G, cette somme est $= o$. Donc la force résultante des forces suivant VN est $= o$. Donc la direction et la valeur de la force que nous cherchons, sera la même que celle qui résulte des seules forces suivant VP perpendiculaires à CG. Donc la direction de cette force ne peut manquer d'être une ligne OKL perpendiculaire à CG.

A l'égard de la valeur de la force suivant OL, elle est égale à la somme des forces suivant VP multipliées par les petites masses correspondantes V ; et comme les forces VP sont proportionnelles à VQ, et que $\int V.VQ$ est égal à CG multiplié par la masse MRC, par la propriété du centre de gravité ; il s'ensuit, que si on appelle φ la force accélératrice du point G, la force suivant QL sera $= \varphi . MRC$.

La distance CK de la ligne OL à $C = \frac{\int V.\varphi.\frac{VC}{CG}\times VC}{\varphi.MRC}$ $= \frac{\int V.VC^2}{CG.MRC}$. Car, puisque toutes les forces φ se réduisent à une puissance dirigée suivant OKL, il s'ensuit que la même puissance dirigée en sens contraire suivant LKO feroit équilibre aux forces φ; cet équilibre étant supposé, il continuera d'avoir lieu, si on suppose le point C fixe. Or dans ce dernier cas, le moment de la force $\varphi.MRC$ agissant suivant LKO doit être égal (par le principe du levier) à la somme des momens des forces VM: le premier de ces momens est $\varphi.MRC\times CR$; le second est $\int V.\varphi.\frac{VC}{CG}.VC$. Donc etc.

COROLLAIRE I.

140. On voit par-là que la position de la ligne OKL est toujours donnée, quelle que soit φ.

COROLLAIRE II.

141. Si un corps CRM, entièrement libre, est animé par une puissance quelconque K, dirigée suivant une ligne quelconque GB, qui passe par le centre de gravité G, et qu'en même tems ce corps tende à tourner autour de son centre de gravité G, avec une vîtesse quelconque; on prouvera, comme dans le Lemme précédent, que la force résultante sera $= K$, et dirigée

suivant une ligne OKL parallèle à GB. Donc cette puissance dirigée suivant LKO feroit équilibre à la puissance K passant par le centre G, et aux puissances qui tendent à faire tourner le corps. Donc le moment de cette puissance par rapport au point G doit être égal au moment de la puissance K, par rapport au même point G, et au moment de toutes les puissances de rotation. Donc si on appelle Ψ la puissance qui tend à faire tourner autour de G un point quelconque placé à la distance b, et a la somme des produits des particules par le quarré de leurs distances à G, on aura $K \times GK = K \times o + \frac{\Psi a}{b}$; ou $\frac{\Psi a}{b} = K.GK$.

Il est à remarquer que pour que la force suivant OKL soit du côté où nous l'avons supposée dans la figure, la force de rotation doit agir dans ce même sens. Autrement il ne pourroit y avoir d'équilibre entre la force suivant LKO et la force de rotation.

Dans l'hypothèse contraire GK sera négative, et on aura $K \times GK = -\frac{\Psi a}{b}$ ou $K \times GK + \frac{\Psi a}{b} = o$.

COROLLAIRE III.

142. De là il est aisé de conclure, pour le dire en passant, que si un corps libre et en repos est poussé par une puissance quelconque K suivant OKL, son centre de gravité G sera mû suivant GB parallèlement à OKL, de la même manière que si la puissance K

passoit par le centre G, et que de plus le corps tournera autour de ce même centre G suivant $O\ K\ L$ avec une vîtesse Ψ, telle que $\frac{\Psi a}{b} = K.\ G\ K$, c'est-à-dire avec la même vîtesse qu'il tourneroit, si le centre G étoit supposé fixe, et que la puissance K agît au point K suivant $O\ K\ L$ pour faire tourner le corps.

Car (*art.* 61) le mouvement que le corps doit prendre doit être tel, que si on le lui donnoit en sens contraire, il fût en équilibre avec la puissance K. D'où il s'ensuit par l'article précédent qu'il doit prendre le mouvement que nous venons de dire.

Soit M la masse du corps; toutes ses parties se mouvront parallèlement à $G\ B$ avec une vîtesse égale à $\frac{K}{M}$, et de plus (nommant x leurs distances à G) elles tourneront suivant $O\ K\ L$ autour de G avec une vîtesse $= \frac{\Psi x}{b} = \frac{K.\ G\ K.\ x}{a}$; d'où il est aisé de voir que tous les points de la ligne $C\ G$ auront parallèlement à $G\ B$ une vîtesse $\frac{K}{M} - \frac{K.\ G\ K.\ x}{a}$; donc si on prend sur la ligne $C\ G$ un point H, tel que $G\ H = \frac{a}{M.\ G\ K}$, la vîtesse de ce point H sera nulle. Donc ce point sera en repos, et sera par conséquent ce que M. Bernoulli appelle le *centre spontané de rotation* du corps. Au reste il est visible que ce centre

change à chaque instant, puisqu'à chaque instant la ligne *G K* change de situation.

PROBLÊME VI.

143. *Un Corps* C R V (Fig. 44) *de figure quelconque, dont* G *est le centre de gravité, étant suspendu à un fil* A C, *et les lignes* A C, C G *étant infiniment peu écartées de la verticale, trouver la vîtesse des points* C *et* G *pour un tems donné* t (42).

Les parties du corps *C R V* ont chacune un mouvement égal et parallèle à celui du point *C*, et elles tournent en même tems autour de ce point *C* avec des vîtesses qui sont entr'elles comme les distances à ce point. Soit *p* la pesanteur absolue d'une particule quelconque *V* suivant la verticale *V Q*, et soit cet effort décomposé pour chaque particule en deux autres, dont l'un suivant *V u* soit égal et parallèle à la force accélératrice du point *C* suivant *C P*, et l'autre soit dirigé suivant *V n*. Cet effort *V n* dont on ne connoît point encore la direction, sera égal et de même direction pour toutes les particules : c'est pourquoi on peut regarder tous les efforts *V n* comme réunis au centre *G*, et agissant suivant *G N* parallèle à *V n*. Il faut de plus décomposer cet effort *V n* pour chaque particule en deux autres, dont l'un soit l'effort nécessaire pour faire tourner la particule *V* autour de *C*, et l'autre soit détruit. J'appelle ce dernier effort *s*, et puisque tous les efforts *s* doivent être

(42) On suppose que les points *A*, *C*, *G* sont dans un même plan vertical.

détruits, il faut que la force qui en résulte soit dans la direction de AC.

On a déja trouvé que GN parallèle à Vn, et dont la position est inconnue, est la direction de la force résultante des forces Vn; on trouvera (*art.* 140) la position de la ligne KL, direction de la force résultante des efforts des particules V pour tourner autour de C, quoiqu'on ne connoisse pas encore la valeur de cette force. La force suivant GN étant composée de la force suivant KL, et de la force résultante des forces s, cette dernière passera par le concours L de GN et KL; de plus elle doit être dans AC prolongée. Donc le point L est dans AC prolongée : donc la ligne GN doit passer par le point où se rencontrent les lignes KL donnée de position, et AC prolongée; et CL sera la direction de la force résultante des forces s.

Soit π la force de C suivant CP, laquelle est commune à toutes les particules, φ celle de G pour tourner autour de C, on menera Gi parallèle à CP, et GM à AP, et on nommera AC, l, CG, a, GK, b, m la masse du corps, CP, x, l'angle fait par CG et par la verticale, $\frac{y}{a}$ (43) : GK et GL pourront être censées égales, et l'on aura l'angle $GLM = \frac{GC.L.CG}{GK} =$

(43) La distance de G à la verticale qui passe par C est supposée y; donc l'angle dont il s'agit $= \frac{y}{a}$, puisqu'il est infiniment petit.

$(\frac{y}{a}$

$\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right).\frac{a}{b}$, et l'angle $L\,G\,M = \frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}$; mais la force $\pi = p.\,L\,G\,M = p\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}\right]$; et la force suivant $K\,L\,(\varphi.\,m)$ doit être à la force suivant $G\,L\,(p.\,m)$: : l'angle $G\,L\,M$ au sinus total (44). Donc $\varphi = p\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}$; on a donc $-d\,d\,x = \left[x - \left(\frac{y\,l}{a} - x\right)\frac{a}{b}\right]\frac{2\,d\,t^2}{T^2}$, et $-d\,d\,y = \left(\frac{y\,l}{b} - \frac{a\,x}{b}\right).\frac{2\,d\,t^2}{T^2}$; équations qui s'intégreront par une méthode pareille à celle dont on s'est déja servi pour des cas semblables, dans les *art.* 118 et 122.

COROLLAIRE.

144. Si on veut que les points C, G arrivent en même tems à la verticale, on fera

$$x : y : : \frac{x}{l} - \frac{y}{b} + \frac{a\,x}{b\,l} : \frac{y}{b} - \frac{a\,x}{b\,l};$$

donc $\frac{x\,y}{b} - \frac{a\,x\,x}{b\,l} = \frac{x\,y}{l} - \frac{y\,y}{b} + \frac{a\,x\,y}{b\,l}$:

donc $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{l-b}{2\,a} \pm \sqrt{\left[\frac{l}{a} + \left(\frac{l-b}{2\,a} - \frac{1}{2}\right)^2\right]}$.

(44) L'angle $S\,L\,O$ est considéré comme droit, et dans l'équation suivante T est pris dans le même sens qu'à l'article 118.

Si l est fort grande par rapport à a et à b, on a $x = \frac{y\,l}{a}$ et $x = -y$. La première de ces équations donne $\frac{x}{l} = \frac{y}{a}$; c'est-à-dire, que si le fil est fort long, les lignes CG et AC doivent être à très-peu-près dans la même droite, pour que les points C, G arrivent en même tems à la verticale. La seconde donne les angles des lignes AC, CG avec la verticale, et du même côté, en raison inverse de AC à CG; c'est-à-dire que pour les points C, G arrivent en même tems à la verticale, il faut par la première équation, que CG et AC soient dans la même ligne droite, et par la seconde, que le centre G soit situé au premier instant dans la verticale AP, ou au moins fort proche de cette verticale.

Au reste ce problême étant absolument analogue à celui du fil chargé de deux poids, est susceptible de remarques semblables. Nous les laissons à faire au Lecteur.

§. II.

Des Corps qui vacillent sur des plans.

PROBLÊME VII.

145. *Soit une figure quelconque* CKO (Fig. 45) *tellement située sur un plan horizontal* MCS, *que la direction* GF *de son centre de gravité* G *ne passe pas par son point touchant* C; *on demande ce qui arrivera à cette figure.*

Cette figure ne peut avoir que deux mouvemens; l'un de rotation autour du point touchant C qui change à chaque instant; l'autre, qui sera le même dans toutes les parties de la figure, pour glisser le long du plan vers M ou vers S : il faut donc déterminer d'abord, si ce dernier mouvement se fait vers M ou vers S; en second lieu, la valeur de la force qui le produit, et que j'appelle π; en troisième lieu, la force du centre G pour tourner autour de C, et que je nomme φ; enfin, si cette dernière force fait tourner G à droite ou à gauche.

Quelles que soient les forces φ, il est certain qu'on peut trouver (*art.* 140) la direction $Z\,N\,O$ de la force qui en résulte, et que cette ligne $N\,O$ sera perpendiculaire à $C\,G$ prolongée. De plus, la force résultante des efforts absolus de chaque particule en vertu de sa pesanteur, sera dirigée suivant $N\,G\,F$, et sera $= p.\,m$, en appellant m la masse du corps, et p la gravité absolue. De même la ligne $K\,G\,R$ parallèle à $M\,S$, sera la direction de la force résultante de toutes les forces π, et cette force sera $\pi.\,m$. Or par notre principe, il faut que la force suivant $N\,F$ puisse se décomposer en trois, dont la première soit la force résultante du concours d'action des forces φ, la seconde la force résultante des forces π, et la troisième s'anéantisse. Cette troisième ne peut s'anéantir, que sa direction ne soit la ligne $C\,D$ perpendiculaire au plan en C. De là il est aisé de voir par la seule inspection de la figure, 1°. que $N\,O$ et non pas $N\,Z$ sera la direction de la force résultante des forces φ,

et qu'ainsi la figure tournera de gauche à droite. 2°. Que la force suivant NG sera composée de la force suivant NO, et d'une force dont la direction NL passera par N et par l'intersection L des lignes CD; KR. 3°. Que la figure glissera de G vers K, non de G vers R. 4°. La force suivant NF étant donnée, et les lignes NL, NO données de position, la force suivant NO sera donnée, et par conséquent φ. De même la force suivant NL sera donnée; et comme son rapport avec la force $\pi . m$. est celui de LQ à QC, la force π sera donnée. Donc le problême est résolu, et l'on a le mouvement de la figure au premier instant.

Nous avons fait voir (*art.* 84) que le centre G descendoit dans une ligne droite verticale. Pour savoir la vîtesse avec laquelle il descend au premier instant, cherchons la force accélératrice initiale, c'est-à-dire au premier instant de la descente. Soit (Fig. 46) GF, x, et φ la force accélératrice du point G pour tourner autour de C, m la masse du corps, on aura 1°. la force suivant $NO = \varphi . m$ (*art.* 139); de plus, GF étant donnée, on doit par la nature de la courbe connoître GC, que j'appelle X, et GP que j'appelle z. La force suivant NR sera à la force suivant NO:: le sinus de l'angle PNG au sinus de l'angle GNR. Donc la force suivant $NR = \frac{\varphi . m . GP}{GN} \times \frac{RN}{CF}$, et la force suivant $RL =$ la force suivant NR multipliée par $\frac{RG}{RN} = \frac{\varphi . m . GP}{GN} =$

$\frac{\varphi . m . GF}{CG}$. Donc la force du point G suivant GL, est à sa force φ pour tourner autour de C : : GF : GC : or la force suivant GF est à la force φ (45) : : CF : CG; donc la force suivant $GF = \frac{\varphi . CF}{CG}$: mais la force suivant NG $(p . m)$ doit être à celle suivant NO $(\varphi . m)$: : le sinus de RNk au sinus de RNG, c'est-à-dire : : Rk à CF; donc $\varphi = \frac{p . CF}{Rk}$; donc la force suivant $GF = \frac{p . CF^2}{Rk . CG}$; et comme CF, CG, Rk sont données en x, il est clair qu'on aura la force initiale suivant GF exprimée en x.

On peut employer une méthode analogue pour trouver la vîtesse dans les autres instans : mais l'article suivant donnera une méthode plus simple.

SCOLIE I.

146. Il est clair par l'*art.* 84 que non-seulement dans

---

(45) La force avec laquelle le centre G s'approche du plan n'est plus la pesanteur; puisqu'une partie de cette force est détruite au point C comme on l'a vu. Le centre G ne s'approche du plan qu'en vertu de son mouvement de rotation autour de C; or quel que puisse être ce mouvement qu'on nomme ici ϕ, l'effort qui en résulte pour s'approcher de MS sera $\frac{\varphi \times CF}{CG}$, (comme on le verra aisément en faisant la décomposition); il n'est donc question que de connoître φ; or la valeur de cette force doit être conclue de la condition qu'une partie de la pesanteur du corps est détruite au point C.

le premier instant, mais dans les suivans, le centre de gravité G descendra toujours dans une droite verticale : or de-là il est très-aisé sans calcul, de trouver le mouvement de la figure. Car par un point quelconque E (fig. 45), soit tirée la tangente EB sur laquelle on abaissera la perpendiculaire GB : lorsque G sera à une distance du plan égale à GB, le point E touchera le plan.

Quand le point C (fig. 47) n'est pas un point touchant, par exemple, si la figure donnée est un triangle dont C soit un des angles, alors le centre étant en V, le point C sera au point E, tel que $VE = GC$.

Il ne reste plus qu'à savoir le tems que la figure employe à parvenir dans chaque situation donnée.

Voici pour le trouver une méthode assez simple. Soit (fig. 48) $GV = u$ la quantité dont le centre est descendu après un tems quelconque t; la distance x du centre de gravité au plan sera pour lors $= VF'$, et il est clair qu'on aura $du = -dx$ et $-ddu = ddx$; donc $x = A - u$, A étant la valeur de x lorsque $t = 0$; et l'on aura pour la force perdue verticalement par toutes les parties du corps, $pm - \frac{m\,ddu}{dt^2}$, ou plus exactement (*art.* 27) $pm\left(1 - \frac{b^2\,ddu}{2a\,dt^2}\right)$. De plus l'espace circulaire qu'une particule quelconque du corps placée à la distance b du centre G, aura décrit autour de ce centre G pendant le tems t, sera donnée en A et en u par la nature de la figure, et par consé-

quent pourra être appellée V, et la force perdue par cette particule sera $\frac{-pddV.\theta^2}{2adt^2}$; donc (*art.* 141) nommant A' la somme des produits des particules par le quarré de leurs distances à G, il faudra que $pm\left(1-\frac{\theta^2 ddu}{2adt^2}\right)\times CF-\frac{pA'ddV.\theta^2}{2abdt^2}$ soit $=0$. Or CF est donnée en A et en u par la nature de la figure.

Maintenant soit $CF=u'$, $ddV=rddu+sdu^2$, r et s étant des fonctions connues de u, on aura $pmu'-\frac{pmu'ddu.\theta^2}{2a.dt^2}-\frac{pA'rddu.\theta^2}{2abdt^2}-\frac{pA'sdu^2.\theta^2}{2abdt^2}=0$; donc faisant $dt=qdu$, et substituant pour ddu sa valeur $\frac{-dqdu}{q}$ à cause que $ddt=0$, on aura l'équation différentielle $pmu'q^3du+\frac{pmu'dq.\theta^2}{2a}+\frac{pA'r\theta^2dq}{2ab}-\frac{pA'sdu.\theta^2q}{2ab}=0$; d'où l'on tirera aisément par les méthodes connues (*) la valeur de q en u, et par conséquent celle de t en u.

On peut encore employer à cette recherche le principe de la conservation des forces vives. Soit U la vîtesse du centre G pour descendre verticalement, U'

(*) *Voyez* les Œuvres de M. Bernoulli, Tom. I; *Act. Erud.* 1697. etc.

la vîtesse de rotation, on trouvera très-aisément en nommant M la masse du corps, que la somme des forces vives de chaque particule est $MUU + \frac{U'U'A'}{b^2}$: maintenant puisque u est la quantité dont le centre est descendu pendant le tems t, on aura par le principe de la conservation des forces vives, $2pu M = MUU + \frac{U'U'A'}{b^2}$. Or 1°. $U = \frac{du}{dt}$. 2°. L'espace V, décrit pendant le tems t par le mouvement de rotation, est donné en u, et par conséquent on a U' ou $\frac{dV}{dt} = \frac{V'du}{dt}$, V' étant une fonction connue de u. Donc on aura $dt^2 = \frac{du^2}{2pu} + \frac{A'V'^2 du^2}{2pMub^2}$; ce qui donnera t en u.

SCOLIE II.

147. Lorsque la figure ne doit faire que des oscillations infiniment petites, la distance initiale GF (fig. 49) ne diffère de la ligne GC menée au point touchant C que d'une quantité infiniment petite du second ordre; d'où il est aisé de conclure que le centre G ne descend que d'une quantité infiniment petite du second ordre, au lieu que l'angle de rotation est infiniment petit du premier ordre. Donc on peut regarder u comme nul par rapport à V: ainsi on a pour lors $dd u = 0$ et

$p\ m.\ C'\ F' = \frac{p\ A'\ d\ d\ V.\ \theta^2}{2\ a\ b\ d\ t^2}$: or imaginant les rayons osculateurs infiniment proches $C\,R$, $C'\,R$, on a l'angle $\frac{V}{b}$ ou son égal $F\,G\,F' = C\,R\,C' = C\,G\,C'.\ \times \frac{C\,G}{C\,R}$; donc faisant $C\,R$, r, $C\,G$, $\mathcal{C}$, $C\,F$, A, on aura $C'\,F'$ ou $C'\,G\,F'.\ C'\,G = (C\,G\,F + F\,G\,F' - C\,G\,C') \times C\,G = \frac{A}{\mathcal{C}} + \frac{V}{b} - \frac{V\,r}{\mathcal{C}\,b}) \times \mathcal{C} = A + \frac{V\,\mathcal{C}}{b} - \frac{r\,V}{b}$. Donc l'équation ci-dessus deviendra $d\ d\ V = \frac{2\ a\ b\ d\ t^2}{A'\ \theta^2} \times (m\ A + m\ \frac{V\,\mathcal{C}}{b} - \frac{r\ m\ V}{b})$. Telle est l'équation pour le cas des oscillations infiniment petites, ou, ce qui revient sensiblement au même, très-petites.

Si l'on suppose $\mathcal{C} < r$, ensorte que $m\,\mathcal{C} - r\ m$ soit une quantité négative; et qu'on fasse attention que V et $d\ V$ doivent être $= 0$, lorsque $t = 0$; on aura par les méthodes que j'ai expliquées ailleurs (*) $V = \frac{-2\ a\ b\ m\ A}{A'\ \theta^2} \times (\cos.\ \frac{t\sqrt{2\,a.(m\,r - m\,\mathcal{C})}}{\theta\sqrt{A'}} - 1) : (\frac{2\ a\ [m\ r - m\ \mathcal{C}]}{A'\ \theta^2})$; par conséquent l'espace parcouru circulairement par les particules qui sont à la

(*) Voyez *Recherches sur le système du monde*, I. Part. art. 25. p. 30.

distance b du centre G, sera $\frac{bA}{r-\mathfrak{C}} \times (1 - \cos. \frac{t\sqrt{2a(mr-m\mathfrak{C})}}{0\sqrt{A'}}$.

Si $\mathfrak{C} > r$, on aura par les formules connues cos.

$$\frac{t\sqrt{2ab.mr-m\mathfrak{C}}}{0\sqrt{A'}} = \frac{c^{\frac{t\sqrt{2a.m\mathfrak{C}-mr}}{0\sqrt{A'}}} + c^{\frac{-t\sqrt{2a.m\mathfrak{C}-mr}}{0\sqrt{A'}}}}{2};$$

quantité réelle, et qui croît à l'infini à mesure que t croît; ainsi les oscillations ne seroient plus alors infiniment petites comme on le suppose; ou, pour parler plus exactement, la solution précédente ne pourroit plus servir.

Par exemple, quand une ellipse est posée perpendiculairement sur son petit axe, et qu'on la dérange tant soit peu de cette situation, l'expérience prouve qu'elle se remet ou tend à se remettre dans son premier état, en faisant des oscillations très-petites; et c'est aussi ce qui résulte de l'équation précédente. Car alors $\mathfrak{C} < r$, puisque tout le monde sait que le rayon de la développée à l'extrémité du petit axe d'une ellipse, est plus grand que ce petit axe. Donc le cosinus d'un angle quelconque ne pouvant être plus grand que l'unité, bV ne sauroit être plus grand que $\frac{bbA}{r-\mathfrak{C}}$. Au contraire si l'ellipse est posée sur son grand axe, alors r est $< \mathfrak{C}$, et les oscillations ne sauroient être infini-

ment petites. C'est aussi ce que l'expérience confirme, puisque le corps *culbute*, et ne se rétablit pas dans sa première situation.

De-là il est aisé de tirer une méthode générale pour voir si un corps, mis d'abord en équilibre sur un plan, puis déplacé un peu de cet état, doit s'y remettre ou *culbuter*. Tout se réduit à savoir si le rayon osculateur au point touchant est plus grand ou plus petit que la distance du centre de gravité à ce point. Dans le premier cas le corps se rétablira de lui-même par des oscillations infiniment petites; dans le second il *culbutera*.

SCOLIE III.

148. Le Savant M. *Euler* dans le Tome VII. des *Mémoires de Pétersbourg*, s'est proposé de résoudre le Problême VII, pour le cas seulement où les vacillations du corps sur le plan doivent être infiniment petites; sa méthode consiste à faire ensorte que les momens des forces des particules pour tourner autour de C, (Fig. 45) soient égaux aux momens de leur gravité absolue par rapport au point C considéré comme fixe; ce qui revient au même que de décomposer la force suivant NF en deux, dont l'une soit la force suivant NO résultante des forces ϕ pour tourner autour de C, et l'autre passe par les points N et C, et soit anéantie.

Or la force suivant NC ne peut être anéantie, que quand NC est perpendiculaire à MCS, à moins qu'on ne suppose le plan raboteux, et d'une aspérité assez gran-

de, pour détruire l'effet de la force $N\,C$ parallèlement au plan. Ainsi pour que la solution de M. *Euler* ait lieu, il faut supposer que le plan n'est pas parfaitement uni. C'est vraisemblablement ce que l'Auteur veut dire par ces paroles : (*) *In hoc motu verò notandum est planum super quo fit, aliquantulùm asperum esse ponendum, ne curvæ de loco suo inter vacillandum dimoveri queant, quod eveniret, si planum maximè foret politum.* Ces paroles, *ne de loco suo dimoveri queant*, signifient sans doute; *de peur que les courbes, outre leur mouvement autour du point touchant, n'ayent aussi un mouvement pour glisser parallèlement au plan.* Mais je ne sai ce qui a empêché que M. *Euler* n'eût égard à ce dernier mouvement dans sa solution. Ce grand Géomètre m'a fait l'honneur de me mander depuis, par une lettre du 2 Octobre 1746, que quand il avoit traité ce Problême, il ignoroit la manière de faire entrer dans le calcul le mouvement progressif. Notre principe en fournit, comme l'on voit, un moyen bien simple.

SCOLIE IV.

149. Si la circonférence de la figure et la surface du plan sur lequel elle glisse ne sont pas parfaitement unies, voici comment on trouvera pour lors les forces p et π au premier instant. On regardera le point C (Fig. 46) comme une petite éminence de masse donnée, et on supposera que l'on connoisse de quelle force accéléra-

(*) Page 108.

trice g ce petit corpuscule devroit être animé suivant CS ou CM, pour que, si cette force étoit tant soit peu augmentée, il fût capable de surmonter la résistance provenante des inégalités du plan. On décomposera d'abord la force absolue suivant NG en deux, dont l'une soit la force cherchée suivant NO, et l'autre agisse suivant la ligne inconnue NL. Cette dernière force doit être décomposée en deux, dont l'une suivant $LK = \pi . m$, et l'autre suivant LC regardée comme poussant le point C suivant CT, donne à ce point C un effort suivant $CS =$ à l'effort connu g.

Soient les données GP, a, GN, b, GO, c, CR, e, RG, f, et l'indéterminée $GL = y$, on aura la puissance suivant NL à la puissance suivant NG $(p \times m)$ :: le sinus de l'angle GNO ou $\frac{GP}{GN}$ au sinus de l'angle ZNL ou $\frac{LZ}{NL}$; mais $\frac{GP}{GN} = \frac{a}{b}$; $LZ = GP \times \frac{OL}{OG} = \frac{a.(c+y)}{c}$; et $NL = \surd [\, bb + yy \,]$. Donc la force suivant $NL = \frac{p.m.NL.OG}{GN.OL} = \frac{p.m.c.\surd bb+yy}{b(c+y)}$. De plus la force suivant LC est égale à la force suivant NL multipliée par le rapport de sinus de l'angle NLG ou $\frac{NG}{NL}$ au sinus de l'angle RLC ou $\frac{CR}{CL}$; enfin la force suivant CS est égale à la force suivant LC, mul-

tipliée par $\frac{LR}{LC}$; d'où l'on tire $\frac{p.m.LR.GO}{OL.CR}$ ou $p.m.\frac{(y-f).c}{(c+y).e}$ pour la valeur de cette force suivant CS : soit μ la masse de la petite éminence C, il faut que $p.m.\frac{c.(y-f)}{e.(c+y)}=g.\mu$; d'où l'on tirera la valeur de y, et par conséquent les valeurs absolues des forces suivant NL, LK et NO, qui sont celles que l'on cherche.

Mais il y a ici une chose importante à observer, c'est que la force du point C suivant CS, doit être dans la même direction que celle suivant laquelle les parties du corps CRN glissent parallèlement au plan; d'où l'on voit que le point L ne peut être qu'entre R et A, A étant le point d'intersection des droites NC, RG; et l'expression de la force suivant CM sera pour lors $\frac{p.m.(f-y).c}{e.(c+y)}=g.\mu$, d'où l'on tirera la valeur de y. Si cette valeur est plus grande que GR, ou plus petite que GA, ou négative, la figure ne peut faire autre chose que tourner autour du point C, qui dans chaque instant variera, et pourra être regardé comme fixe pendant un instant.

La valeur de y est $\frac{pmfc-g\mu ec}{g\mu e+pmc}$: cette valeur dans la figure présente ne sauroit être plus grande que f, comme il est évident, puisque $pmfc-g\mu ec$

est $< g\mu ef + pmfc$; mais elle seroit négative si pmf étoit $< g\mu e$; et elle seroit plus petite que GA ou $\frac{bf}{e+b}$, si $pmfc$ étoit $< g\mu ec + gmcb + gmbf$.

Si on veut que la force nécessaire pour faire mouvoir le point C malgré la résistance du plan, ne soit pas donnée, mais seulement son rapport à la pression de ce point sur le plan, on fera RL à RC dans le rapport de la force du frottement à la force de la pression; et on aura par là le point L qui doit toujours être placé entre R et A; sinon la figure n'aura aucun mouvement parallèlement au plan.

SCOLIE V.

150. Pour trouver le mouvement de la figure dans les instans qui suivent le premier, on emploiera des méthodes analogues à celles qui ont été données ci-dessus. Tout se réduit à trouver le mouvement du centre G parallèlement et perpendiculairement au plan, et en même tems le mouvement de rotation de la figure autour de ce centre. Or soit v le mouvement du centre G suivant GK, on aura $\frac{-pmddv}{dt^2}$ ou $\frac{-pmddv.\theta^2}{2adt^2}$ pour la force perdue suivant GK, et conservant d'ailleurs les noms de l'article 146, il faudra que la force résultante de la force perdue $\frac{-pmddv.\theta^2}{2adt^2}$, de la

force aussi perdue $\frac{-p\,m\,d\,d\,u\,.\,\theta^2}{2\,a\,d\,t^2}$, et de la force perdue de rotation, soit détruite. Pour cela il faut que cette force résultante 1°. passe par le point touchant *C*. 2°. Qu'étant décomposée en deux forces, parallèle et perpendiculaire au plan, ces deux forces ayant entr'elles l'équation qu'exige la loi supposée du frottement. On aura donc deux équations par le moyen desquelles on pourra déterminer les inconnues u et v. C'est ce qu'il est inutile d'expliquer plus en détail.

Au reste, lorsque la figure se meut sur un plan qui n'est pas uni, et que le frottement est supposé proportionnel à une partie donnée de la force comprimante, les lignes *C R* et *C L* (Fig. 46) ont entr'elles un rapport constant; par conséquent le centre *G* se meut sur la courbe qu'il décrit, comme s'il étoit mû par une force dont la direction fît toujours avec le plan *M S* un angle constant.

§. III.

Des Corps qui agissent les uns sur les autres par des fils, le long desquels ils peuvent couler librement.

PROBLÊME VIII.

151. *Un fil* ANPM (Fig. 50) *de longueur donnée, étant arrêté fixement en* A *sur un plan horizontal, et chargé de deux poids* M, P, *dont l'un* M *soit attaché fixement au fil, et l'autre* P, *puisse couler le long du fil par*

par le moyen d'un anneau; on demande le mouvement de chacun de ces deux corps, en supposant qu'ils aient reçu l'un et l'autre une impulsion quelconque.

Soient $P\,p$, $M\,m$, les deux lignes parcourues par les corps P, M, dans un instant. Ayant décrit d'un rayon arbitraire constant $A\,N$ l'arc $N\,n$, et fait $n\,\mathrm{n} = n\,N$, la question se réduit à trouver la grandeur et la position du côté $p\,V$ qui suit immédiatement $P\,p$, et la position $V\,T$ de l'autre partie du fil. Je suppose que dans l'instant que le corps P parcourt $p\,V$, il eût parcouru uniformément dans la direction de $P\,p$ la ligne $p\,\mathrm{p} = p\,\pi + \pi\,\mathrm{p} = P\,p + \pi\,\mathrm{p}$, et que de même le corps M eût parcouru uniformément $m\,o = m\,\mu + \mu\,o = M\,m + \mu\,o$. Par notre principe, il faut décomposer les mouvemens $p\,\mathrm{p}$, $m\,o$ chacun en deux autres $p\,x$, $p\,V$, et $m\,L$, $m\,T$, tels que par les mouvemens $p\,V$, $m\,T$, les corps p, m ne se nuisent point l'un à l'autre, c'est-à-dire qu'on ait $A\,V + V\,T = A\,p + p\,m$, et que par les mouvemens $p\,x$, $m\,L$, ces corps se fassent équilibre. D'où il s'ensuit 1°. que $m\,L$ doit être dans le prolongement de $p\,m$. 2°. Que le corps p pouvant couler (*hyp.*) le long du fil, il ne sauroit y avoir d'équilibre, à moins que sa direction $p\,x$ ne divise en deux également l'angle $A\,p\,m$. 3°. Enfin, que la force suivant $m\,L$ doit être à la force suivant $p\,x$, comme le sinus de la moitié de l'angle $A\,p\,m$ est au sinus de cet angle entier.

Les lignes $A\,p$, $p\,m$, $p\,x$ étant données de position,

on voit assez, que si on connoissoit la grandeur des lignes $p\,x$, π p, le problême seroit résolu, et qu'il n'y auroit plus que le calcul à faire : or 1°. les lignes $p\,x$, π p doivent être telles que les angles $V\,A\,p$ et $p\,A\,P$ soient égaux; 2°. les lignes $p\,x$ et π p étant données, les lignes $A\,V$ et $V\,T$ sont données de grandeur et de position, et la somme de ces lignes doit être constante. On aura donc deux conditions, d'où l'on tirera deux équations qui serviront à trouver $p\,x$ et π p. En voici l'analyse.

Soit $A\,N = 1$, $N\,n = dx$, $A\,P = y$; $p\,Q = dy$, le sinus de la moitié de l'angle $A\,P\,M$, z, enfin c la longueur du fil.

1°. La différence $P\,A\,p$ $(d\,\dot{x})$ + celle de l'angle $A\,P\,M$ $\left(\frac{2\,dz}{\sqrt{[1-z\,z]}}\right)$, est égale à l'angle de $P\,M$ avec $p\,m$: donc cet angle de $P\,M$ avec $p\,m = dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1-z\,z]}}$.

2°. $\frac{p\,D}{P\,p}$ et $\frac{P\,D}{P\,p}$, c'est-à-dire, les sinus des angles $p\,P\,D$ et $P\,p\,D$, sont donnés par le sinus z et par celui de l'angle $A\,p\,P$; je les exprime donc ainsi (*) $\varphi\left(z, \frac{P\,Q}{P\,p}\right)$ et $\Delta\left(z, \frac{P\,Q}{P\,p}\right)$, ou $\varphi\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}}\right)$ et $\Delta\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}}\right)$. Donc $p\,D = P\,p \times$

(*) Les quantités φ, Δ, mises au-devant d'une autre quantité quelconque, marqueront toujours dans la suite une fonction de cette quantité.

$\varphi\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}}\right)$ et $PD = Pp.\ \Delta\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}}\right)$.

3°. $PM - pm = dy$ et $mB - pD = dy - \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1-zz]}}\right)^2 . \frac{(c-y)}{2}$.

4°. Si on fait $px = \epsilon$, $\pi p = \alpha$, on aura (*art.* 92) l'angle $\pi Ap = dx - \frac{2\,dy\,dx}{y}$; $\pi Ap = \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2dx^2]}}$; pAV ou $xAp = \frac{\epsilon z}{y}$. Donc $\frac{2\,dy\,dx}{y} - \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2dx^2]}} + \frac{\epsilon z}{y} = 0$ (*A*).

5°. $A\pi = y + 2\,dy + y\,dx^2$; $Ap = A\pi + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2+y^2dx^2]}}$; $AV = Ap - \epsilon\sqrt{[1-zz]}$. Donc $AV = y + 2\,dy + y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}} - \epsilon\sqrt{[1-zz]}$: donc en supposant dx constant, on a $ddy = y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2+y^2\,dx^2]}} - \epsilon\sqrt{[1-zz]}$ (*B*).

6°. Présentement, on a $\mu o = \alpha . \frac{Mm}{Pp}$; $PM - \pi\mu =$ (*art.* 90) $2\,dy - \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1-zz]}}\right)^2 (c-y)$; $\pi o = \pi\mu - o\,l$ (on suppose que μl est un arc décrit du

centre π et du rayon $\pi\mu$, et que MB est perpendiculaire à Bp) $= \pi\mu - \frac{\alpha . mB}{Pp}$; $o\,\mathrm{p} = \pi o + \frac{\alpha . pD}{Pp}$; $oV = o\,\mathrm{p} - \epsilon\sqrt{[1 - zz]}$. Or à cause de l'équilibre, on a $M \times oT : \frac{P.\epsilon}{2} :: 1 : \sqrt{[1 - zz]}$; donc $oT = \frac{P.\epsilon}{2M\sqrt{[1-zz]}}$; donc $VT = oV - \frac{P\epsilon}{2M\sqrt{[1-zz]}}$; donc $VT = c - y - 2dy + \left(dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}\right)^2 (c - y) - \frac{\alpha . mB}{Pp} + \frac{\alpha . pD}{Pp} - \epsilon\sqrt{[1 - zz]} - \frac{P\epsilon}{2M\sqrt{[1-zz]}}$. Cette valeur de VT ajoutée à la valeur de AV trouvée ci-dessus *n.* 5. doit être $= c$. De-là on tirera une équation, qui, avec l'équation (A), servira à chasser α et ϵ.

7°. L'angle $AVp = App - dx - \mathrm{p}pV$, et l'angle pVT ou $pVo = pp\,o + \mathrm{p}\,pV + \mathrm{p}\,oV$. Or l'angle $\mathrm{p}\,oV = \frac{\epsilon z}{c-y}$, et l'angle $p\,\mathrm{p}\,o = p\pi o - \pi o\,\mathrm{p} = p\pi o - \frac{\alpha . PD}{Pp.(c-y)}$; l'angle $p\pi o = p\pi\mu + \mu\pi o = p\pi\mu + \frac{\mu o . MB}{Mm.c-y)}$ $= p\pi\mu + \frac{\alpha . MB}{Pp.(c-y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha}{Pp.(c-y)} \times$

$[PD+(c-y).(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})]$; l'angle $p\pi\mu$ est égal à l'angle Ppm, plus l'angle de $\pi\mu$ avec pm, et ce dernier angle (*art.* 90) est $=(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}).(1+\frac{2dy}{c-y})$; donc $AVp+pVT=ApP+Ppm-dx-\mathrm{p}\,p\,V+(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}).(1+\frac{2dy}{c-y})+\frac{\alpha}{Pp.(c-y)}\times[PD+(c-y)..(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})]-\frac{\alpha.PD}{Pp.(c-y)}+\mathrm{p}\,p\,V+\frac{\epsilon z}{c-y}$; mais $ApP+Ppm=APM+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}$. Donc $d(\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})=(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})\times(\frac{2dy}{c-y}+\frac{\alpha}{Pp})+\frac{\epsilon z}{c-y}$. Si on met dans cette dernière équation ainsi que dans l'équation (B), les valeurs de α et de ϵ trouvées par le n°. 6, on n'aura plus que deux équations qui ne contiendront que la constante dx avec les variables y et z, et leurs différences; et en faisant évanouir la constante dx, on n'aura plus qu'une équation différentielle à deux variables y, z; ainsi le problême ne dépend plus que de la séparation des indéterminées. On peut encore simplifier les équations en nommant k l'angle dont

le sinus est z, ce qui donnera $\frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = dk$, $\sqrt{1-zz} = \cos. k$, et $z = \sin. k$.

REMARQUE I.

152. Si l'on attache un fil ABC (Fig. 51) fixement en A et en C, et qu'un corps B, pesant ou non, puisse couler librement le long du fil ABC, il est évident que ce corps B décrira l'ellipse MBN, dont A et C sont les foyers. Mais je dis de plus qu'il la décrira de la même manière que s'il n'étoit pas attaché au fil, et qu'il descendit librement dans la cavité de cette ellipse. Car lorsqu'il se meut librement dans l'ellipse, la direction du mouvement qu'il perd à chaque instant, est une perpendiculaire à l'ellipse au point où est le corps. Mais lorsqu'il se meut le long du fil ABC, la direction du mouvement qu'il perd à chaque instant, est la ligne BF qui divise en deux également l'angle ABC, et cette ligne BF, comme l'on sait par les sections coniques, est perpendiculaire à l'ellipse MBN en B. Donc etc.

REMARQUE II.

153. Si un fil $AMBNC$ fixe en A et en C (Fig. 52) passe à travers un corps $KRBGL$ qui puisse couler librement dans ce fil, et que toutes les parties de ce corps $KRBGL$ soient animées de vîtesses telles qu'il soit en équilibre, je dis que la force résultante doit

avoir pour direction la ligne GR qui coupe en deux également l'angle AGC, fait par les lignes AK, CL prolongées. Autrement le corps KRL, glisseroit ou vers A ou vers C, et par conséquent il n'y auroit point équilibre, ce qui est contre la supposition.

D'après cette remarque, il est aisé de trouver la courbe que décriroient les points K, L, et la vîtesse de chacun de ces points, si le corps avoit reçu une impulsion quelconque. Car il y a pour chaque instant quatre inconnues à trouver, savoir les directions des points K et L, et leurs vîtesses. Or il faut que ces directions et ces vîtesses soient telles, que $AK + CL$ fasse une quantité constante, aussi bien que la distance KL: de plus, les forces perdues doivent être tellement dirigées pour chacun des points du corps KRL, que la résultante ait pour direction GR; cette dernière condition produit deux équations. Car regardant la force perdue par chaque particule, comme composée de deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à GR, il faut que la somme de ces dernières soit zéro, et que la direction de la force résultante des autres soit GR; on aura donc en tout quatre équations et quatre inconnues, et le problême sera résolu. Je n'en donne point le calcul, parce qu'on imagine bien qu'il est très-long et très-compliqué, et qu'il suffit ici d'en présenter l'esprit.

REMARQUE III.

154. Je ne finirai point cette matière, sans faire ici

une observation assez importante sur la solution des problêmes dans lesquels on suppose que les corps se tiennent par des fils. Comme les fils sont supposés inextensibles, les corps ne peuvent jamais se trouver à une distance l'un de l'autre, plus grande que la longueur qui les sépare; mais rien n'empêche qu'ils ne puissent se trouver à une distance plus petite que cette même longueur. Ainsi, deux corps étant, par exemple, attachés aux deux extrémités d'un fil, si on leur donnoit des mouvemens tels, qu'ils pussent suivre ces mouvemens sans que le fil s'allongeât, il est évident qu'ils suivroient ces mouvemens précisément de la même manière que s'ils étoient libres, et qu'il n'y auroit alors aucun problême à résoudre. Aussi ne pourroit-on pas appliquer à ces sortes de cas le principe général dont nous nous sommes servis jusqu'ici : car si on vouloit faire usage de ce principe, on trouveroit que les mouvemens par lesquels les corps devroient se faire équilibre, au lieu de tendre à allonger le fil, tendroient au contraire à en rapprocher les extrémités; et qu'ainsi, puisque le fil ne fait aucune résistance à ce dernier effort, ces mouvemens ne pourroient être détruits.

En général, quand les corps se tiennent par des fils, le moyen de s'assurer si les fils doivent rester toujours tendus, c'est de voir si en les supposant tels, les forces qui doivent faire équilibre, ont des directions qui tendent à allonger le fil. Si cela est, on aura eu raison de supposer que les fils ne se plioient point; sinon les corps seront

seront mûs précisément comme s'ils étoient libres, et qu'ils ne fussent pas joints ensemble. On n'a pas besoin de prendre toutes ces précautions, quand les corps se tiennent par des verges inflexibles auxquelles ils sont fixement attachés. Car leur distance est toujours nécessairement égale à la longueur de la verge qui les sépare, et ne peut être ni plus grande ni plus petite. Aussi la remarque que nous venons de faire sur le cas où les corps se tiennent par des fils, seroit inutile, si au lieu d'être joints par des fils, ils l'étoient par des verges inflexibles unies ensemble par des charnières. Il y a, au reste, une analogie parfaite entre ce dernier cas et celui des fils. Car, quand les mouvemens imprimés à des corps unis par des fils sont tels, que les fils par leur inextensibilité puissent les altérer, il arrive précisément à ces mouvemens le même changement, que si les fils étoient des verges inflexibles jointes ensemble par des charnières.

SCOLIE GÉNERAL.

155. Quand on applique notre principe général à la solution de quelque problême de Dynamique, on pourroit craindre quelquefois de se tromper, en supposant mal-à-propos que les mouvemens de certains corps diminuent, lorsqu'ils croissent réellement, et au contraire. Mais il en est ici comme dans une infinité d'autres problêmes, où le calcul redresse de lui-même les fausses hypothèses que l'on a faites en supposant négatif ce qui devoit être positif, ou réciproquement.

Il faudra seulement avoir attention de suivre exactement dans le calcul les suppositions qu'on a faites d'abord, et de ne point donner aux équations une forme qui contredise ces suppositions. Par exemple imaginons que α, ε, γ, etc. soient les forces perdues par chaque corps, et que par les suppositions qu'on a faites et la figure qu'on a tracée, ces forces doivent être parallèles et dirigées dans le même sens : alors si la condition de l'équilibre demande que ces forces se détruisent mutuellement, (abstraction faite de tout point fixe, et considérant le corps comme libre), il faudra faire $\alpha + \varepsilon + \gamma = 0$, et non pas $\alpha + \varepsilon = \gamma$, ou $\alpha + \gamma = \varepsilon$, etc. Mais si par la supposition qu'on a faite, la force γ, par exemple, se trouvoit dirigée parallèlement aux forces α et ε, et en sens contraire, alors il faudroit faire $\alpha + \varepsilon = \gamma$ ou $\alpha + \varepsilon - \gamma = 0$.

De même si les forces α, ε, γ, devoient agir par des leviers x, z, y, et que ces leviers fussent tous d'un même côté, et les puissances tous du même sens, on auroit $\alpha x + \varepsilon z + \gamma y = 0$. Mais si γ, par exemple, étoit du côté opposé à x et à z, tout le reste demeurant de même, on auroit $\alpha x + \varepsilon z = \gamma y$ ou $\alpha x + \varepsilon z - \gamma y = 0$, et ainsi du reste. De-là il s'ensuit que dans les cas proposés les équations $\alpha + \varepsilon + \gamma = 0$, ou $\alpha x + \varepsilon z + \gamma y = 0$, représentent parfaitement et en général les conditions de l'équilibre, pourvu qu'on ait soin dans ces équations de donner aux quantités α, ε, γ, etc. et x, y, z, etc. les

signes qu'elles doivent avoir selon les suppositions qu'on a faites et les figures qu'on a tracées ; il en sera de même de tout autre cas. Avec de telles précautions on n'aura jamais à craindre de s'égarer.

§. IV.

Des Corps qui se poussent ou qui se choquent.

PROBLÊME IX.

156. *Un corps dont la masse est* m, *et la vîtesse* u, *se mouvant sur une même ligne avec un autre corps dont la masse est* M *et la vîtesse* U, *trouver la vîtesse de ces corps après le choc.*

Soit v la vîtesse du premier corps après le choc, V celle du second : on fera (*art.* 61) $u = v + u - v$ et $U = V + U - V$. Il faut par notre principe, que $V = v$ et que $m(u - v) + M(U - V) = o$. Donc v ou $V = \frac{mu + MU}{M + m}$.

COROLLAIRE.

157. Si un corps M de masse quelconque animé d'une vîtesse donnée U, est choqué par un corps m infiniment petit, dont la vîtesse soit u, il recevra par ce choc une quantité de mouvement égale à $m(u - U)$; et si u est infiniment plus grande que U, la quantité de mouvement qu'il recevra sera égale à mu, c'est-à-dire à la quan-

tité de mouvement du corps choquant. On voit par-là, que quand le mouvement d'un corps est accéléré ou retardé par une puissance impulsive, dont il reçoit, pour ainsi dire, à chaque instant des coups réitérés, la quantité de mouvement que le corps perd ou gagne à chaque instant, ne doit être regardée comme proportionnelle à la puissance impulsive, qu'en regardant cette puissance comme une masse infiniment petite, animée d'une vîtesse infinie par rapport à la vîtesse du corps poussé. En ce cas, l'effet de cette puissance est toujours le même, soit que le corps se meuve ou qu'il soit en repos.

Remarque.

158. C'est ici le lieu de prouver ce que nous avons avancé plus haut, (*art.* 22) que le principe des forces accélératrices proportionnelles à l'élément de la vîtesse, ne doit point être employé pour déterminer les mouvemens qui résultent de l'impulsion. En effet, supposons, par exemple, qu'un corps vienne en choquer un autre en repos; la quantité de mouvement gagnée par le choqué, sera $\frac{m\,M\,u}{M+m}$. Il faudroit donc que la cause productrice de mouvement fût proportionnelle à $\frac{m\,M\,u}{M+m}$. Mais 1°. comment peut-on prouver que la cause motrice du corps M est proportionnelle à $\frac{M\,m\,u}{M+m}$, plutôt qu'à une autre fonction quel-

conque des grandeurs M, m, u? Ne seroit-il pas même assez naturel de penser que $m\,u$ pourroit être regardé comme proportionnelle à la cause motrice, ce qui ne manqueroit pas d'induire en erreur, puisque la quantité de mouvement du corps M n'est point comme $m\,u$, toutes choses d'ailleurs égales? 2°. Quand on sauroit que la cause motrice est proportionnelle à $\frac{M\,m\,u}{M+m}$, on n'en pourroit rien conclure, sinon que la quantité de mouvement du corps M, regardée comme effet de cette cause, seroit proportionnelle à $\frac{M\,m\,u}{M+m}$, sans savoir si elle seroit précisément cette quantité même (*). Il faut donc nécessairement employer d'autres principes, pour déterminer la quantité absolue de mouvement du corps choqué.

LEMME IX.

159. *Soit sur un plan* Q R *un corps* A K Q R (Fig. 53) *de figure quelconque, qui puisse glisser librement sur ce plan de* Q *vers* R, *ou de* R *vers* Q; *et soit un corps quelconque* M, *placé sur* K Q *en tel endroit qu'on voudra; supposons que le corps* A K Q R *ait suivant* R Q *une vîtesse quelconque, et que le corps* M *ait une vîtesse et une direction telle qu'il fasse équilibre au corps* A K Q R. Je dis que cela ne peut arriver 1°. que $M\,G$ perpen-

(*) Voyez l'Encyclopédie au mot CAUSE, *Tom. II. p.* 790. Voyez aussi le mot FORCE, *Tom. VII. p.* 114, *col.* 2.

diculaire à KQ ne soit la direction du corps M. 2°. Que la force du corps M suivant MO, et la force du corps $AKQR$ suivant RQ, ne se réduisent à une seule force dont la direction soit perpendiculaire au plan QR.

COROLLAIRE.

160. Donc la force du corps M doit être à celle du corps $AKQR$, comme AL est à LS.

SCOLIE.

161. La direction de la force résultante de celles des deux corps, doit être non-seulement perpendiculaire au plan, mais passer par la base QR. D'où l'on voit que si on mène par le centre de gravité de la figure $AKQR$ une droite parallèle à QR, cette droite doit couper la ligne MO en un point, d'où l'on puisse mener une perpendiculaire qui tombe sur QR.

PROBLÈME X.

162. *Supposant le corps* M *animé d'une force accélératrice quelconque perpendiculaire à la base* Q R, *et le reste comme dans le Lemme précédent, on demande le mouvement du corps* M *et de la figure.*

Soient AB, $B6$ (Fig. 54) deux côtés consécutifs de la figure, tels que $AB = BV$, et supposons que tandis que le corps M parcourt A B, la figure ait parcouru Aa; ensorte que les côtés AB, $B6$ soient parvenus dans la situation a B, B D : soit $a\alpha = Aa$,

B b = *A* B, et enfin la ligne b δ, celle que le corps *M* parcourroit en vertu de sa force accélératrice : les lignes $a\,\alpha$, B δ seroient celles que les deux corps parcourroient dans l'instant suivant, sans leur action mutuelle. Au lieu de ces lignes ils parcourront, l'un la ligne *a* a, l'autre la ligne B *z*, terminée par le côté *b z* parallèle à $\beta\,d$; et il faut par notre principe que la masse du corps *M* animée de la vîtesse $z\,\delta$ fasse équilibre à la masse *m* de la figure, animée de la vîtesse a α. D'où il s'ensuit que $\delta\,z$ doit être perpendiculaire à *b z*, et que $m.\alpha$ a : $M.z\,\delta$ :: *i* b : $z\,\delta$. Donc $m.\alpha\,a = M.i\,b$; mais *i* b = *k z* — b *o* — a α et a $\alpha = d\,(a\,\alpha)$; donc si on nomme *A a*, *d u*, *B K*, *d y*, on aura $m\,d\,d\,u = M\,d\,d\,y - M\,d\,d\,u$, ou $d\,d\,u.(M+m) = M\,d\,d\,y$. Equation générale et fort simple pour trouver le mouvement des deux corps, quelle que soit la force accélératrice qui agisse sur le corps *M*, pourvu que cette force soit toujours perpendiculaire à *Q R*.

SCOLIE I.

163. Les constantes qu'il faut ajouter dans l'intégration de l'équation $M\,d\,d\,y = (M+m).\,d\,d\,u$, dépendent du premier *d y* et du premier *d u*, qu'il est toujours facile de trouver. Par exemple, si la direction du mouvement du corps *M* en *A* (Fig. 55) est suivant la tangente de la courbe *A B* en *A*, il faudra tirer la tangente *A P*, et prendre $A\,O = \frac{P\,N.\,M}{M+m}$, pour avoir

le point O où la figure se trouvera, lorsque le corps M sera en N (46).

Si le corps M agit par sa seule force accélératrice sans aucune impulsion primitive, il faudra tirer AQ perpendiculaire à BD, et prendre $AO = \frac{NQ.M}{M+m}$.

Au reste, il est clair par l'article 84 que dans ce dernier cas, le centre de gravité commun des deux corps descend dans une ligne droite verticale.

SCOLIE II.

164. On pourroit donner plusieurs autres solutions de ce problême, qui toutes font parvenir à l'équation $M\,ddy = (M+m).\,ddu$: j'ai préféré la solution qu'on vient de voir à toutes les autres, parce qu'elle est extrêmement simple.

---

(46) ib (fig. 54) est l'espace que le corps parcourt de moins dans le second instant que dans le premier, parallèlement au plan. Or la quantité dont le corps est retardé à chaque instant est la quantité dont il s'avance parallèlement au plan par son mouvement propre, moins le mouvement avec lequel la figure l'entraîne; donc puisque $ib = ddy - ddu$, et que ddu marque ce dernier mouvement, ddy marque le premier; donc dans l'intégration de l'équation $Mddy = (M+m)\,ddu$, on ne doit pas toujours prendre $M \times KB$ pour l'intégrale de $M\,ddy$; car $\int ddy$ doit être ici la somme de tous les petits espaces que le corps M parcourt parallèlement au plan par son mouvement propre : or cet espace total est déterminé par la direction primitive du corps. S'il tend à se mouvoir au premier instant suivant AK, BK sera $\int ddy$, puisque sans la surface courbe il seroit arrivé au point K; si au contraire il tend au premier instant à se mouvoir suivant AP (fig. 55), PN sera $\int ddy$, puisqu'en vertu de cette seule tendance il seroit venu au point P.

Tous

Tous les problèmes analogues à celui-ci qu'on pourra proposer, se résoudront toujours par l'application de notre principe, et il n'y aura de difficulté que dans le calcul.

LEMME X.

165. *Soient deux Sphères* G, C (Fig. 56), *mûes suivant* G B, C D, *avec des vîtesses qui soient représentées par les lignes infiniment petites* G B, C D; *il est clair que si* D B = C G, *c'est-à-dire si* D E = B F, *les mouvemens de ces deux Sphères ne se nuiront point l'un à l'autre*; d'où il s'ensuit qu'en général, pour que ces Sphères ne se nuisent point, il faut dans chacune que la vîtesse du point touchant *A* suivant la perpendiculaire *C A G* aux deux corps, soit la même de part et d'autre. En effet on aura pour lors *E D = F B*; donc *D B = C G*.

COROLLAIRE.

166. Si deux corps de figure quelconque se touchent, alors en regardant comme une petite surface sphérique leur point d'attouchement commun, on verra que pour que ces deux corps ne se nuisent point, la vîtesse du point d'attouchement estimée suivant une perpendiculaire aux deux surfaces en ce point, doit être la même pour chacun d'eux.

LEMME XI.

167. *Si tant de corps qu'on voudra viennent se cho-*

quelle manière, qu'en les supposant parfaitement durs et sans ressort, ils demeurent tous en repos après le choc; je dis que s'ils sont à ressort parfait, ils retourneront en arrière chacun avec la vîtesse qu'il avoit avant le choc. Car l'effet du ressort est de restituer en sens contraire à chaque corps le mouvement qu'il a perdu par l'action des autres.

COROLLAIRE.

168. Donc si tant de corps durs qu'on voudra se choquent à la fois, et que a, b etc. soient leurs vîtesses avant le choc, qui soient changées après le choc en a, b etc. alors regardant les vîtesses a, b etc. comme composées des vîtesses a, α; b, β; etc. les vîtesses de ces mêmes corps après le choc (dans le cas où ils seront élastiques) seront composées des vîtesses a, $-\alpha$; b, $-\beta$; etc.

Nous ne parlerons donc dans les problêmes suivans que du choc des corps durs, puisqu'on en déduit aisément les lois du mouvement des corps élastiques.

Je n'examine point ici s'il y a des corps parfaitement durs : c'est une question qui appartient plutôt à la Physique qu'à la Mécanique; et je ne suppose ici des corps parfaitement durs, que comme on suppose d'ordinaire dans la Mécanique des leviers inflexibles, des machines sans frottement etc. Je suppose aussi comme une vérité d'expérience, que le ressort rend à chaque corps en sens contraire ce qu'il a perdu de mouvement par le choc, sans examiner de quelle manière se fait cette restitution.

Comme il est assez bien prouvé que les corps à ressort s'applatissent et se compriment par le choc, pour se rétablir ensuite dans leur première figure, on pourroit objecter que ce n'est pas le véritable moyen de trouver les lois du mouvement de ces corps, que de les supposer incompressibles, comme nous faisons ici ; et il est vrai que cette circonstance de plus ou de moins doit apporter à ces lois beaucoup de changement, comme nous le ferons voir plus bas. Quoiqu'il en soit, nous pouvons supposer au moins que les corps changent très-peu de figure, et que la compression aussi bien que la restitution se fait dans un tems très-petit ; en ce cas, le mouvement après le choc sera sensiblement le même, que si on considéroit les corps comme incompressibles. On résoudroit ces problêmes exactement, si on savoit suivant quelle loi la figure du corps change par la compression ; mais on ne peut faire sur cela que des hypothèses.

PROBLÊME XI.

169. *Supposons qu'un corps* A (Fig. 57) *en vienne choquer un autre* B O Q *en repos, suivant une direction* A C *qui ne passe pas par le centre de gravité* M *du corps choqué ; on demande le mouvement de ces deux corps après le choc.*

Quelque mouvement que prenne le corps *B O Q*, il est certain (*art.* 76) que son centre *M* ira toujours en ligne droite après le choc, tandis que toutes ses parties tourneront autour de ce même centre. Il faut de plus

par notre principe, que si on imprimoit à ce corps un mouvement contraire à celui qu'il a reçu par le choc, il fît équilibre avec le corps A animé du mouvement qu'il a perdu par le choc.

On a démontré plus haut (*art.* 141) que si le centre de gravité M d'un corps se meut suivant une direction quelconque, et que ce corps tourne en même tems autour de son centre, la direction de la force résultante sera parallèle à la direction du centre de gravité (*). Or la direction de cette force ne peut ici être que la ligne CA perpendiculaire à l'endroit A du contact; car cette force doit être détruite par une force égale du corps A, laquelle agit suivant AC. Donc le mouvement du centre M doit être parallèle à AC. De plus, la vîtesse de rotation doit être telle, qu'étant combinée avec le mouvement du centre M, les corps ne se nuisent point, c'est-à-dire qu'ils aient dans le même sens une vîtesse égale. Or abaissant la perpendiculaire MN sur CA, il est aisé de voir que le mouvement du point touchant A suivant AN, est égal au mouvement du point N. La difficulté se réduit donc à trouver la vîtesse du point M, et la vîtesse de rotation du point N.

Soit u la vîtesse du corps A avant le choc, u sa vîtesse après le choc, α la vîtesse de M, ν la vîtesse de rotation du point N, on aura 1°. $\alpha + \nu = u$. De

(*) Ceux qui voudront une démonstration plus détaillée de cette proposition, la trouveront dans nos *Recherches sur la précession des Equinoxes*, art. 86 et suiv. Mais la démonstration citée de l'*art.* 141 paroît suffisante.

plus, la force résultante des mouvemens des parties du corps M en sens contraire, doit être égale à $A.(u-\mathrm{u})$; or cette force doit être égale à $M.\alpha$, et avoir pour direction la ligne CA; on a donc 2°. $M.\alpha = A.(u-\mathrm{u})$; 3°. si on nomme p la somme des produits des parties du corps M par le quarré de leurs distances à M, on aura (*art.* 141) $\frac{v\,p}{MN} = M.\alpha.MN$. Ces trois équations serviront à déterminer les inconnues α, u, u. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLÊME XII.

170. *Deux corps sphériques* A, a, (Fig. 58) *attachés aux verges* C A, C a, *fixes en* C *et en* c, *se choquant avec des vîtesses données, trouver leurs vîtesses après le choc; on suppose qu'avant le choc ils vont tous deux d'un même côté.*

Soient u, v, les vîtesses des centres A, a, avant le choc, u, v les vîtesses de ces mêmes centres après le choc. Par notre principe, il faut que les vîtesses u, v soient telles, que les deux corps ne se nuisent point, et que si leurs centres avoient les vîtesses $u-\mathrm{u}$, $v-\mathrm{v}$, les deux corps se fissent équilibre; c'est-à-dire que les points A, a étant animés des vîtesses $u-\mathrm{u}$, $v-\mathrm{v}$, il faut que la force du corps A regardée comme réunie en A et agissant suivant Aa, soit égale à la force du corps a regardée comme réunie en a et agissant suivant aA.

Si on mène les perpendiculaires CG, cg à Aa, la première de ces deux conditions donne $\frac{u.CG}{CA} = \frac{v.cg}{ca}$. De plus, si on nomme F la somme des produits des particules du corps A par le quarré de leurs distances à C, ou plutôt à l'axe qui passe par C, et f la quantité analogue à celle-là pour le corps a, la seconde condition donnera $\frac{F.(u-\mathrm{u})}{A\,C.\,CG} + \frac{f.(v-\mathrm{v})}{a\,c.\,cg} = 0.$ (47). De ces deux équations on tirera la valeur de u et celle de v.

COROLLAIRE. I.

171. Si les corps sont élastiques, leurs vîtesses après le choc seront (*art.* 168) $\mathrm{u}+\mathrm{u}-u$ et $\mathrm{v}+\mathrm{v}-v$. La somme des forces vives après le choc, sera $\frac{F}{AC^2}(2\,\mathrm{u}-u)^2 + \frac{f}{a\,c^2}(2\,\mathrm{v}-v)^2 = \frac{F\,u\,u}{A\,C^2} + \frac{f\,v^2}{a\,c^2}$

---

(47) Car $u-\mathrm{u}$ étant la vîtesse de rotation perdue par le centre A, la vîtesse perdue par tout autre point M sera $(u-\mathrm{u}) \times \frac{CM}{CA}$, et sa force $(u-\mathrm{u}) \times \frac{CM}{CA} \times M$; mais à cette force on en peut substituer une agissant suivant GA ou Aa, et qui (en considérant MCG comme un levier angulaire) doit être $= \frac{(u-\mathrm{u}) \times CM^2 \times M}{CA \times CG}$ par le principe du levier: donc la somme des forces perdues du corps A sera $\int \frac{(u-\mathrm{u}) \times CM^2 \times M}{CA \times CG} = \frac{u-\mathrm{u}}{CA \times CG} \times \int CM^2 \times M = \frac{(u-\mathrm{u}) \times F}{CA \times CG}$. Donc, etc.

$+\frac{4F}{AC^2}(\dot{u}u - u\dot{u}) + \frac{4f}{ac^2}(v\dot{v} - v\dot{v})$.

Mais si on multiplie le premier de ces deux derniers termes par $\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA}$, et l'autre par $\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca}$, ce qui ne change point leur valeur, on verra qu'à cause de $\frac{u \cdot CG}{CA} = \frac{v \cdot cg}{ca}$, et de $\frac{F.(u-u)}{AC.CG} + \frac{f.(v-v)}{ac.cg} = 0$, ils se détruisent mutuellement. Donc la somme des forces vives après le choc $= \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fvv}{ac^2}$, c'est-à-dire, que la somme des forces vives avant et après le choc, est la même.

COROLLAIRE II.

172. Si les lignes CA, ca sont parallèles dans l'instant du choc, il faudra faire $CG = CA$, $cg = ca$, et le reste comme ci-dessus. Ce dernier cas a été résolu par M. *Jean Bernoulli* le fils, dans le Tome VII. des *Mémoires de Pétersbourg*, en supposant les corps élastiques. Nos deux solutions sont fort différentes, quant à la méthode et quant au résultat. Car dans le Mémoire de M. *Bernoulli*, les vîtesses après le choc sont exprimées par des quantités radicales; ici on peut s'assurer aisément qu'il n'y aura point de radicaux : les quantités F, f, les seules qui pussent faire entrer des radicaux dans l'expression des vîtesses, n'en contiennent point,

puisqu'en nommant b, $\mathcal{C}$ les rayons des Sphères A, a, CN, a, cn, α, on trouve $F = (\mathrm{a\,a} + 2\,\mathrm{a}\,b + \frac{7}{5}\,b\,b).A$, et $f = (\alpha^2 + 2\,\alpha\,\mathcal{C} + \frac{7}{5}\,\mathcal{C}\,\mathcal{C}).a$. *Voyez-en le calcul dans le Mémoire cité de M. Bernoulli.*

Mais outre que la solution de M. *Bernoulli* n'est pas directe, étant appuyée sur le principe de la conservation des forces vives, cette solution est encore fondée sur un autre principe qui n'est pas vrai. Ce principe consiste à regarder le corps A mû par la verge inflexible CA, comme si toutes ses parties se mouvoient d'un mouvement égal à celui du centre A, et qu'en même tems le corps A tournât sur son centre avec un mouvement angulaire égal à celui de la verge. En conséquence la force du corps A est la même selon lui, que s'il n'étoit point attaché à la verge, et que toutes ses parties eussent une vîtesse égale à celle de son centre, sans aucune rotation; ce qui me paroît contraire aux lois de la Mécanique. M. *Bernoulli* se contente de faire voir *art.* XV. de son Mémoire, que dans l'un et l'autre cas la quantité de mouvement est la même, soit que le corps tourne autour de C, ou que toutes ses parties se meuvent avec une vîtesse égale à celle du centre A; ce qu'on ne peut lui contester. Mais dans une Sphère qui tourne autour d'un point fixe, la quantité de mouvement et la force ne sont pas la même chose: il faut avoir égard de plus au bras de levier par lequel chaque particule agit; c'est la somme des produits de chaque élément par sa vîtesse et par sa distance au point fixe, qui fait la force,

et

et non pas seulement la somme des produits de chaque élément par sa vîtesse.

PROBLÊME XIII.

173. *Deux corps* A, B (Fig. 59) *attachés aux fils* C A, G B *fixes en* C *et en* G, *venant à se choquer, trouver leurs mouvemens après le choc.*

Soit u la vîtesse du point A avant le choc pour tourner autour de C, laquelle vîtesse est commune à toutes les parties du corps A; soit outre cela v la vîtesse du centre de gravité du corps A avant le choc, pour tourner autour du point A par où le corps est suspendu. Soient de même U et V les vîtesses qui dans le corps B avant le choc sont analogues à u et v : qu'enfin ces vîtesses après le choc soient changées en u et v, U et V, qui doivent être telles, que les corps A, B aillent de compagnie sans se nuire l'instant d'après le choc, et que s'ils n'avoient que les vîtesses u—u, v—v, U—U, V—V, ils se fissent équilibre.

Toutes les parties du corps A (Fig. 60) étant considérées comme animées de la vîtesse u—u, on peut réduire tous leurs mouvemens à une seule force, dont la direction OK passera par le centre de gravité G du corps A, et sera perpendiculaire à CA prolongée vers L. De plus le centre de gravité du corps A étant animé de la vîtesse v—v pour tourner autour de A, on trouvera (*art.* 140) sans connoître la valeur de v—v, la direction NO de la force résultante. La force suivant OP

que je suppose résulter des forces suivant OK, NO, doit s'anéantir : elle doit donc être telle, qu'on puisse la décomposer en deux autres, l'une suivant PL dans la direction de CA, l'autre suivant Pa perpendiculaire en a à l'endroit du contact des deux corps. Or comme la position des points P, O est donnée par les lignes aP, CA, NO, KO, toutes données de position ; il s'ensuit que la direction OP de la force résultante des forces suivant OK et NO est aussi donnée, et qu'ainsi le rapport de ces forces suivant OK et NO est donné. Mais en nommant m la masse du corps A, on a la force suivant $OK = m.(u - \mathrm{u})$, et (*art.* 139) celle suivant $NO = m.(v - \mathrm{v})$. Donc le rapport de $u - \mathrm{u}$ à $v - \mathrm{v}$ est donné. On trouvera par un raisonnement semblable, que le rapport de $U - \mathrm{U}$ à $V - \mathrm{V}$ est donné pour l'autre corps. On pourra donc des quatre inconnues u, v, U et V en chasser deux. On a de plus deux autres conditions à remplir ; savoir que la force suivant Pa soit égale à celle qui agit pour l'autre corps en sens contraire, et qu'outre cela ces deux corps aillent de compagnie l'instant d'après le choc, c'est-à-dire que la vîtesse du point touchant a suivant Pa, soit la même pour l'un et pour l'autre : ces deux conditions donneront deux autres équations qui serviront à trouver les deux inconnues restantes, et ces équations ne passeront jamais le premier degré.

D'un corps qui en choque plusieurs autres à la fois.

PROBLÊME XIV.

174. *Supposons qu'un corps sphérique* A, (Fig. 61) *mû suivant une ligne donnée* A Q *avec une vîtesse donnée, rencontre à la fois les deux corps en repos* B, C, *on demande les directions et les vîtesses de ces trois corps après le choc.*

Soit $AN = u$ la vîtesse du corps A avant le choc, AR sa direction cherchée après le choc, et $AV = v$ sa vîtesse après le choc; BZ, CX les vîtesses que reçoivent les corps B, C; on suppose que toutes ces lignes AN, AV, BZ, CX qui représentent des vîtesses, sont infiniment petites.

La vîtesse BZ du corps B, et la vîtesse AV du corps A, doivent être telles, (*art.* 165) que $VZ = AB$. De même la vîtesse CX du corps C, et la vîtesse AV du corps A doivent être telles que $VX = AC$. De plus, si dans l'instant du choc, on suppose le corps A animé des mouvemens AV, VN, ou AV, Ap, et les corps B, C animés (*art.* 61) des mouvemens égaux et contraires BZ, Bz; CX, Cx; il faut par notre principe, que les corps A, B, C, animés des mouvemens Ap, Bz, Cx, se fassent équilibre.

Soient les données $AQ = a$, $QS = T$, $QT = T$, et les inconnues $QR = t$, $AV = v$; on aura (en menant RO perpendiculaire à AS et Ro à AT)

$\frac{RO}{AR} = \frac{(T-t).a}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}$; $\frac{R\bullet}{AR} = \frac{(T+t).a}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}$; de plus, à cause de $VZ = AB$, on aura $BZ = \frac{AV.AO}{AR} = v\left(\frac{\sqrt{[a^2+T^2]}}{\sqrt{[a^2+t^2]}} - \frac{(T-t).T}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}\right)$. On trouvera par un raisonnement semblable $CX = v\left(\frac{\sqrt{[a^2+T^2]}}{\sqrt{[a^2+t^2]}} - \frac{(T+t).T}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}\right)$.

Mais si on mène du point V la perpendiculaire VP sur AN, on aura, à cause de l'équilibre, $A.PN = B.\frac{BZ.AQ}{AS} + C.\frac{CX.AQ}{AT}$, et $A.VP = \frac{B.BZ.QS}{AS} + \frac{C.CX.QT}{AT}$. En mettant dans ces équations au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on parviendra à déterminer v et t; et on verra, si l'on veut en faire le calcul, qu'il n'y a jamais que des équations linéaires à résoudre. En effet, on tirera d'abord des deux équations la valeur de $\frac{v}{\sqrt{a^2+t^2}}$; comparant ces deux valeurs, on fera disparoître le radical $\sqrt{a^2+t^2}$, et on aura une équation, où il n'y aura plus que t d'inconnue, et où cette inconnue se trouvera au premier degré :

on trouvera donc aisément la valeur de t, qui étant mise dans l'une des deux valeurs de $\frac{v}{\sqrt{a^2+z^2}}$, on aura la valeur de v.

REMARQUE I.

175. Je ne m'étends pas davantage sur la solution de ce problême, et je ne cherche pas même à la simplifier, parce que l'on en trouve une très-belle solution dans l'ouvrage de M. *Mac-Laurin*, qui a pour titre *A Treatise of fluxions*. On peut au reste, par notre principe, trouver les lois du choc quand une boule en rencontre à la fois tant qu'on voudra; problême qui a été résolu par M. *Jean Bernoulli*, mais par le principe de la conservation des forces vives, et seulement pour le cas où les boules choquées sont égales et disposées semblablement de part et d'autre de la direction de la boule choquante. M. *Bouguer* a aussi résolu ce problême pour ce dernier cas seulement (*Journal des Savans*, Avril 1728) mais sans y employer le principe de la conservation des forces vives. M. *Bernoulli* dans son *Discours sur le Mouvement*, a tiré de la solution qu'il a donnée un grand nombre de belles conséquences sur le mouvement des corps dans les fluides. On y trouve entr'autres plusieurs théorêmes qu'il n'a pas démontrés, et dont j'ai donné la démonstration dans mon *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Liv. III. Chap. I.

REMARQUE II.

cf. end of volume, p. XV – XIX.

176. Au reste, quand on fait attention à la nature du problême général des corps qui se choquent plusieurs à la fois, avec des vîtesses et des directions données, on peut rencontrer dans le détail plusieurs difficultés qu'il est bon d'éclaircir ici, et qui pourront nous donner lieu de faire sur les lois du choc des corps, quelques observations nouvelles.

Supposons, par exemple, qu'une boule A (Fig. 62) mûe suivant AL, rencontre à la fois les boules C, D, E, F semblablement situées de part et d'autre de la ligne AL; que les boules F, E soient en repos, et que les boules C, D, aient parallèlement à AL une vîtesse égale à celle du corps A; il est évident que le corps A n'aura aucune action sur les boules C et D, et que tout se passera de la même manière, que si le corps A ne touchoit que les boules E, F. Mais si les boules C, D avoient une vîtesse moindre que celle du corps A suivant AL; alors le corps A auroit de l'action sur ces boules, et il paroît d'abord qu'il doit communiquer du mouvement à toutes les quatre.

Cependant voici une difficulté. Supposons que la vîtesse des boules C et D avant le choc, ne soit que de très-peu moindre que la vîtesse du corps A: si elle n'est que très-peu augmentée après le choc, alors, comme les boules A, C, D doivent aller de compagnie, la vîtesse de la boule A ne sera que très-peu diminuée; de

plus les boules F, E devant aller aussi de compagnie avec la boule A, auront une vîtesse qui sera à la vîtesse du corps A après le choc, comme le cosinus de l'angle BAF au sinus total, et qui par conséquent sera comme infiniment plus grande que la vîtesse perdue par le corps A. Mais par notre principe, le corps A animé de la vîtesse qu'il a perdue, doit faire équilibre aux corps E, F, C, D animés en sens contraire de ce qu'ils ont gagné de vîtesses: or la vîtesse perdue par le corps A étant (*hyp.*) très-petite, ne sauroit faire équilibre aux vîtesses finies des corps E, F. Donc la vîtesse des boules C, D ne sauroit être de très-peu augmentée. Mais d'un autre côté si leur vîtesse est augmentée d'une quantité qui ne soit pas très-petite, alors elles ne pourront aller de compagnie avec le corps A, dont la vîtesse doit nécessairement être diminuée.

On rencontre une nouvelle difficulté dans l'application du calcul à ce problême. Car on trouve très-aisément les expressions des vîtesses des cinq corps après le choc, quoique suivant la remarque que nous venons de faire, il ne paroisse pas qu'il doive être facile de les trouver. Cependant le calcul est fondé expressément sur les deux conditions, que les cinq corps aillent de compagnie après le choc, et qu'animés en sens contraire de ce qu'ils ont perdu ou gagné de vîtesse, ils se fassent équilibre.

Mais si on examine de quelle manière le calcul satisfait à ces conditions, on verra que de la façon dont

il les exprime, elles ne s'accordent pas toujours avec la nature du problême, et peuvent même conduire à une fausse solution, si on ne les applique comme il faut à la question proposée. Pour que les corps, par exemple, aillent de compagnie après le choc, il faut que les vîtesses de ces corps estimées suivant une perpendiculaire à l'endroit du contact, soient égales entr'elles, condition que le calcul exprime. Mais il faut de plus que ces vîtesses soient dans le même sens ou dans des sens différens, selon l'exigence du cas : condition que le calcul n'exprime point, et ne peut exprimer. De même, pour qu'il y ait équilibre entre les corps touchans F, C, D, E et le corps A, il ne suffit pas que la somme des mouvemens de même part soit $= o$, ce qui est la seule chose que le calcul exprime; il faut encore que les mouvemens faisant équilibre, soient dirigés suivant AB, FA, CA, DA, EA.

Comme le calcul ne peut exprimer ces conditions, ce n'est qu'après avoir trouvé les valeurs et les directions des inconnues, qu'on peut voir si ces conditions sont remplies. Si toutes les conditions ne sont pas remplies, comme il arrive dans le cas dont il s'agit ici, c'est une marque qu'il y a de certains corps dans le système qui ne souffrent rien de l'action des autres, et dont les mouvemens ne reçoivent aucun changement. Ainsi dans le cas présent, quoique les corps C et D aient une vîtesse moindre que la vîtesse du choquant A, néanmoins ces corps C et D ne recevront aucun changement, et tout

tout se passera de la même manière, que si le corps A choquoit les deux corps E, F seuls. Car les corps C et D ne peuvent diminuer de vîtesse par la rencontre du corps A : ils ne peuvent non plus recevoir de vîtesse par l'action du corps A; car comme on l'a vu ci-dessus, ces corps ne peuvent aller de compagnie avec le corps A après le choc. Or il n'y aura point d'action entre les corps A, C, D s'ils ne vont pas de compagnie après le choc. En effet, quand il y a action entre deux corps, leurs mouvemens peuvent toujours se réduire à des mouvemens dans le même sens pour chacun, par lesquels ils ne se nuisent point, et à des mouvemens contraires qui se détruisent. Or les mouvemens contraires ne peuvent se détruire, que les mouvemens dans le même sens ne soient égaux. Car si le premier corps alloit plus vîte que le second, il n'y auroit entre l'un et l'autre aucune action mutuelle possible.

REMARQUE III.

177. Il n'en est pas de même, lorsque les corps A, C, D, E, F sont des corps à ressort. La vîtesse du corps A ne diminue que petit à petit et par des degrés insensibles; ainsi il ne peut manquer d'agir sur les corps C, D, et par conséquent il doit nécessairement altérer leurs mouvemens. C'est pourquoi il faut bien se garder, pour trouver dans ce cas-là les vîtesses après le choc, de se servir de la règle que nous avons donnée *art.* 168.

Cette réflexion m'en a fait faire une autre, c'est que

pour les lois du choc des corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois, cette même règle peut être souvent très-fautive.

Supposons, par exemple, les cinq corps A. F, E, C, D (Fig. 62) à ressort parfait; il se fait dans l'instant du choc une compression dans chacun de ces corps, telle que le corps choqué reçoit à chaque instant en arrière, suivant chacune des directions FA, CA, DA, EA une quantité de mouvement infiniment petite, égale à celle que les corps F, C, D, E reçoivent en avant: ces corps s'applatissent ainsi de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin ils puissent aller de compagnie avec des vîtesses qui soient égales dans le même sens; pour lors ils commencent à se rétablir peu à peu, et perdent ou gagnent de nouveau des quantités de mouvement égales à celles qu'ils ont déja perdues ou gagnées.

Mais comme nous ignorons entiérement suivant quelle loi le ressort produit l'accélération dans les corps, nous ne pouvons savoir si les cinq corps cessent d'être comprimés tous cinq au même instant; et si, par exemple, les corps C et D ne commencent pas à se rétablir, quoique les corps E, F ne soient pas encore entiérement comprimés. En ce cas, les cinq corps n'iroient point de compagnie après le choc, en supposant même que le ressort ne les rétablît pas dans leur premier état. Or, si cela étoit, il ne faudroit plus pour trouver le mouvement des cinq corps après le choc, se servir de la méthode de l'*art.* 168, en regardant d'abord les cinq corps com-

me durs; car cette méthode suppose formellement, que les cinq corps (abstraction faite de leur ressort) aillent de compagnie après le choc.

Une raison qui donne lieu de douter que la compression finisse dans le même instant pour tous les cinq corps, c'est qu'il y a nécessairement des cas où cela ne peut arriver, comme quand les corps C et D sont supposés avoir une vîtesse parallèle à AL, et qui soit de très-peu moindre que celle du corps A suivant AL.

S'il y a des cas où la compression des cinq corps puisse finir en même tems, on conçoit qu'en changeant quelques circonstances, alors la compression pourra ne pas finir dans le même tems; par exemple, si la boule A rencontre quatre boules C, D, E, F, égales et en repos, et que la compression dans ce cas-là finisse au même instant pour toutes les boules (ce qui ne peut pourtant être prouvé) on conçoit qu'en augmentant la masse des deux boules C et D, il pourra se faire que ces deux boules achevent d'être comprimées avant les deux boules E, F, ou ne le soient qu'après. Il est donc absolument nécessaire de chercher comment il faut s'y prendre dans ce cas, pour avoir les lois du choc. C'est ce qu'on va voir dans l'article suivant.

Du choc des corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois.

178. Je regarde avec plusieurs Auteurs deux corps à ressort A, B qui se choquent, (Fig. 63, 64) com-

me s'ils étoient réduits à leurs centres de gravité A, B, et qu'il y eût un ressort placé entre deux, capable de contraction et de dilatation, ce qui représente la compression et restitution successive des deux corps. De plus comme la compression se fait en fort peu de tems, j'imagine que ce ressort ne se dilate et ne se contracte pas beaucoup, mais qu'étant très-peu contracté il a une très-grande force; et j'exprime cette force par une fonction de la quantité dont le ressort est contracté ou dilaté, c'est-à-dire que je suppose proportionnelle à cette fonction la petite quantité de mouvement que l'un des corps perd, et que l'autre reçoit à chaque instant: car ces deux quantités de mouvement sont égales (*art.* 157), parce que le ressort tend à se débander également en sens contraires, avec une vîtesse qu'on doit regarder comme infinie par rapport à celle des deux corps, sa masse étant infiniment petite par rapport à celles de ces mêmes corps.

Cela supposé, si a, b (Fig. 64) sont les points où sont parvenus les corps A, B, et qu'on nomme Aa, x, Bb, y, et t le tems écoulé, on aura $-Addx = \varphi(x-y).dt^2$, et $Bddy = \varphi(x-y).dt^2$; d'où l'on tire $-Addx = Bddy$, et $ndt - Adx = Bdy$, n étant un nombre constant, qu'on déterminera de la manière suivante; on supposera que a, b soient les vîtesses des corps A, B quand $t = 0$; on aura par conséquent lorsque x, et $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$ et $dy = bdt$: donc $n = Aa + Bb$.

L'équation intégrée donne $nt - Ax = By$, et par conséquent $-A\,dd\,x = \varphi\left(x - \frac{nt - Ax}{B}\right)dt^2$; si l'on fait $x - \frac{nt - Ax}{B} = u$, on aura (à cause de dt constant) $-\frac{A.B\,dd\,u}{B+A} = \varphi u.\,dt^2$, et $-\frac{A.B\,du\,dd\,u}{B+A} = dt^2.\,du\,\varphi u$; d'où l'on tire $Aq\,dt^2 - \frac{A.B\,du^2}{2.(B+A)} = dt^2 \int du\,\varphi u$, et

$$dt = \frac{du\sqrt{B}}{\sqrt{[2.(B+A)]}.\sqrt{\left[q - \frac{\int du\,\varphi u}{A}\right]}}.$$

179. Au reste, si je donne ici cette solution, ce n'est pas qu'elle soit nécessaire pour trouver le mouvement des corps A, B; car dans cette hypothèse il leur arrive précisément le même changement, que si la compression et la restitution se faisoient chacune dans un instant : et comme c'est principalement le mouvement après le choc qu'on cherche, que d'ailleurs la loi d'accélération ou de retardation instantanée est inconnue, il est évident que la solution précédente ne peut jetter aucune lumière sur ce cas particulier; aussi n'est-elle ici que comme une introduction à des cas plus compliqués.

180. Dans la figure 65, imaginons que les corps A, C, D, E, F soient des points unis par des ressorts AC, AD etc. et cherchons simplement les vîtesses des corps

A, F, C, parce que les corps E, D doivent subir précisément les mêmes changemens que les corps F, C; supposons les corps arrivés en a, f, c; menant les perpendiculaires $a\varphi$, $a x$, on aura $af = \varphi f$ à cause que les lignes $A a$, Ff sont très-petites, le ressort AF n'étant que très-peu compressible, comme nous l'avons supposé plus haut. Si on nomme p le cosinus de l'angle BAF, r celui de BAC; on aura en faisant $Aa = x$, $Ff = y$, $Cc = z$; $-Add x = \lfloor 2p\varphi(px-y) + 2r\varphi(rx-z)\rfloor dt^2$ (48); $Fddy = \varphi(px-y)dt^2$; $Cddz = \varphi(rx-z)dt^2$. Il y a un cas où ces équations peuvent être séparées en général, c'est celui où $\varphi(px-y) = F(px-y)$; $\varphi(rx-z) = G(rx-z)$ (G et F étant des constantes); en ce cas-là on peut trouver les valeurs de x, de y et de z en t, par la méthode expliquée dans la solution du Problême V ci-dessus, où nous avons enseigné la manière de construire des équations semblables. Le rassort cessera de se comprimer entre les corps A, F, lorsque pdx sera $= dy$, et entre les corps A, C, lorsque rdx sera $= dz$.

181. Lorsque le corps A ne choque que deux corps

(*) La quantité dont le ressort AF est comprimé lorsqu'il devient af, est $AF - af = A\varphi + \varphi F - af$; mais $af = \varphi f = \varphi F + Ff$, comme on l'a déjà remarqué; donc la quantité dont le ressort est comprimé, sera $A\varphi - Ff = px - y$. De plus la force $\varphi(px-y)$ dirigée suivant fa, exerce suivant aA une action exprimée par $p\varphi(px-y)$; la même chose doit se dire du ressort AC; donc $-Addx =$ etc.

F, E semblablement situés de part et d'autre ; ce qui arrive au corps F devant également arriver au corps E, il n'y a pas plus de difficulté, que si le corps A ne choquoit que le seul corps F, et tout se passe à peu près, comme si la compression et la restitution se faisoient en un instant ; c'est pourquoi les calculs précédens sont alors fort peu nécessaires. Ils peuvent néanmoins servir à trouver exactement la vitesse du corps A, et le chemin du corps F, qui se meut, non suivant la droite Ff, comme nous l'avons supposé, et comme on peut le supposer sans erreur, mais sur une très-petite courbe.

Les équations qu'on trouve d'abord, en supposant que F se meuve suivant Ff, et que $af = \varphi f$, sont $-A\,d\,dx = 2p\varphi(px - y)\,dt^2$, et $F\,d\,dy = \varphi(px - y)\,dt^2$. d'où l'on tire, comme dans l'*art.* 178, la valeur de x de y en t. Mais si on nomme fo, (Fig. 66) s, on aura de plus la force suivant fo égale à la force suivant ao multipliée par $\frac{fo}{ol}$, c'est-à-dire par $\frac{a\varphi}{FA}$ ou par $\frac{x\sqrt{[1-p^2]}}{a}$, (en appellant FA, a) et l'on prendra au lieu de $px - y$, la quantité plus exacte $px - y - \frac{(1-p^2)}{2a}x^2$, parce que $AF - ao$ (en négligeant les différences troisièmes), est $A\varphi - Ff - \frac{a\varphi^2}{2FA}$ (49). On

(49) $AF - ao = A\phi + il - i\phi - Fl - af - lo = A\phi - i\phi - Ff$,

remarquera ensuite que dans la première des équations précédentes, au lieu de $2p$, double du cosinus de l'angle BAF, il faut mettre le double du cosinus de l'angle Bal (50), qu'on trouvera $= p - \frac{x\sqrt{[1-p^2]}}{a} \times \sqrt{[1-p^2]}$; cela posé, nommant u la distance entre les deux corps, on aura les équations $-Addx = 2p\varphi(u)dt^2 - \frac{2x(1-p^2)}{a}\varphi u.dt^2$; et (51) $Fddy = \varphi u.dt^2$; de plus on a $-du = pdx - \frac{xdx(1-p^2)}{a} - dy$, et par conséquent $-ddu = pddx - ddy - d\left(\frac{xdx.1-p^2}{a}\right)$; ou

$$-ddu = -\frac{2pp\varphi u.dt^2}{A} + \frac{2px(1-p^2)\varphi u.dt^2}{aA} - \frac{\varphi u dt^2}{F} - d\left(\frac{xdx.(1-p^2)}{a}\right).$$

---

parce que $lo = lf$ à un infiniment petit du troisième ordre près, comme il est aisé de le voir; de plus $i\varphi = \frac{a\varphi^2}{2il} = \frac{2\varphi^2}{2AF}$, en négligeant les quantités infiniment petites du troisième ordre.

(50) Cos. Bal = cos. $(BAl + Ala)$ = cos. $BAl \times$ cos. Ala — sin. BAl sin. Ala; mais cos. $Ala = 1$, puisque cet angle est infiniment petit; sin. $BAl = \sqrt{1-p^2}$; et sin. $Ala = \frac{a\varphi \times 1}{al} = \frac{a\varphi \times 1}{AF} \times \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a}$. Donc, etc.

(51) Nous supposons ici que la force suivant Ff pour le corps F est la même que la force suivant ao, parce qu'elles ne different l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite du *second* ordre, et que nous n'avons égard ici qu'aux quantités infiniment petites du *premier* ordre, négligées dans le premier calcul.

Or

Or par la première solution approchée, on a une valeur de x en u, et de plus une équation séparée entre dt et du, c'est-à-dire, une valeur de dt en u et du, et par conséquent une valeur de du en u et en dt; faisant donc les substitutions convenables, c'est-à dire, mettant au lieu de x sa valeur en u dans les termes $\frac{2px(1-p^2)\varphi u.dt^2}{aA}$, et $\frac{d(xdx)\overline{1-p^2}}{a}$, au lieu de ddx sa valeur $\frac{-2p\varphi u\,dt^2}{A}$, et au lieu de dx^2 sa valeur, qu'on trouve aisément égale au produit de dt^2 par une fonction de u, on parviendra à une équation de cette forme $-ddu = \frac{-2pp\varphi u.dt^2}{A} - \frac{\varphi u.dt^2}{F} + V\,dt^2$, V étant une fonction de u. Or cette équation est intégrable. Maintenant u étant connue en t, ou plutôt t en u, on aura la valeur de x et de y par une méthode fort simple. Car la première solution donne $x = \Delta u$, et la seconde donne $dt = du\,\Gamma u$; donc mettant Δu au lieu de x dans le terme $\frac{2x(1-pp)\varphi u.dt^2}{A}$, on aura $-A\,ddx = dt^2\,\Xi u$, et $-Ax + Bt + C = \int dt \int dt\,\Xi u$: d'où l'on aura la valeur de x en u. Celle de y sera encore plus facile à trouver, puisque $Fy + Dt + G = \int dt \int dt\,\varphi u$.

On aura enfin l'équation $F\,dds = \frac{xV\{1-p^2\}}{a} \times$

$dt^2\,\varphi(px-y)$; et comme x et y sont connues en t, tout le monde voit que l'intégration est fort simple.

REMARQUE.

182. Il résulte de l'article précédent, que quand le corps A choque deux corps à ressort C, D (Fig. 65), également situés de part et d'autre de la direction AB du corps choquant, les vîtesses de ces trois corps après le choc sont, sinon exactement, au moins à peu près les mêmes, que si la compression et la restitution du ressort se faisoient dans un instant. Il n'en seroit pas de même, si les boules choquées n'étoient pas semblablement situées de part et d'autre de la boule choquante.

En effet, supposons que la boule dure A mûe suivant AB (Fig. 67) rencontre les boules dures et en repos C, D avec une vîtesse représentée par Aa; supposons de plus que cette boule A ne change point de direction après le choc, et que Aa soit sa vîtesse, on aura (en faisant les parallélogrammes $Anax$, $Apai$, et menant les lignes ax, ad perpendiculaires à AC, AD) (52) $C.\,Ax = A.\,iX$; et $D.\,Ad = A.\,np$: donc $iX : np :: C.\,Ax : D.\,Ad$; c'est-à-dire, que comme na

(52) Les trois corps devant aller de compagnie après le choc, le corps C doit avoir la vîtesse Ax (*art.* 165), puisque le corps A étant supposé garder la vîtesse Aa aura la vîtesse Ax dans la direction AC; mais en vertu du principe, le corps C animé en sens contraire de la vîtesse Ax doit faire équilibre au corps A animé de la vîtesse iX qu'il a perdue; donc, etc. Même raison de la seconde équation.

est à An, ainsi le cosinus de l'angle BAC, multiplié par C, doit être au produit du corps D par le cosinus de l'angle BAD. Donc le produit du corps C par le sinus de l'angle BAC, et par son cosinus, doit être égal au produit du corps D par le sinus de l'angle BAD, et par son cosinus.

Si les corps C et D sont égaux, on aura le produit du sinus d'un des angles par son cosinus, égal au produit du sinus de l'autre angle par son cosinus, ce qui ne peut arriver, à moins que les angles ne soient complément l'un de l'autre à 90 degrés, et qu'ainsi l'angle DAC ne soit droit. On aura pour lors $Ai : Ax :: Ap : Ad$, Donc, si on suppose la ligne Aa infiniment petite, on voit que dans le cas où les trois corps A, C, D sont à ressort, si l'action des ressorts AC, AD n'est pas comme les lignes Ax, Ad, le point A sera écarté de la ligne droite Aa dès le premier instant, et qu'ainsi les lois du choc entre ces trois corps seront fort différentes de ce qu'elles seroient, si la compression et la restitution se faisoient en un instant.

183. Soit en général AB (Fig. 68) la direction du corps choquant, Aa la courbe qu'il décrit pendant la compression et la restitution du ressort, $Ai = x$, $ai = z$, $Cc = y$, $D\delta = u$, le cosinus de $DAC = r$, on aura $Ax - Cc = x + rz - y$, et $Ad - D\delta = z + rx - u$, et l'on trouvera $-Add\,dx = \varphi(x + rz - y)\,dt^2$; $-Add\,dz = \varphi(z + rx - u)\,dt^2$; $Cdd\,y = \varphi(x + rz - y)\,dt^2$; $Ddd\,u = \varphi(z + rx - u)\,dt^2$;

d'où l'on tire $-Addx=Cddy$, et $at-Ax=Cy$, et de même $-Addz=Dddu$, et $6t-Az=Du$. On aura donc (en mettant dans les deux premières équations, pour y et u leurs valeurs) deux équations où il ne restera plus que deux inconnues x, z, et qui pourront se construire par les méthodes expliquées ci-dessus, si $\phi(x+rz-y)=F.(x+rz-y)$ et si $\phi(z+rx-u)=G.(z+rx-u)$.

184. Soient deux corps A, a (Fig. 69), unis par un ressort Aa, qui se choquent suivant AD, ad, de manière que leur centre de gravité C restât en repos, s'ils pouvoient se mouvoir suivant AD, ad; ces deux corps décriront deux courbes semblables AG, ag pendant le tems de la compression (53), et la compression finira lorsque Gg sera perpendiculaire à chacune des courbes; ensuite pendant la restitution du ressort, ils décriront les courbes GF, gf semblables aux premières; d'où l'on voit que leur mouvement après le choc sera le même, que si la compression et la restitution se faisoient dans un instant. Cela est vrai en général, lorsque deux corps à

(53) L'état du centre de gravité ne changeant point par l'action des corps entr'eux, ce centre doit rester en repos pendant la compression, si, comme on le suppose, il a dû y rester sans la compression : or dans ce cas les distances des deux corps à ce point immobile gardant toujours le rapport réciproque de ces deux corps, seront toujours dans le même rapport : donc les deux courbes AG, ag seront semblables; il en sera de même après la compression. De plus il est aisé de voir que la compression doit finir quand la ligne Gg qui joint les deux corps est perpendiculaire aux courbes qu'ils décrivent, puisqu'ils sont alors le plus près l'un de l'autre qu'il est possible.

ressort viennent à se choquer d'une manière quelconque; car il est aisé de voir que le mouvement de leur centre de gravité ne changeant point par leur action mutuelle, il n'y a qu'à chercher quels seroient leurs mouvemens après le choc s'ils venoient se frapper de manière que leur centre de gravité fût en repos, et donner ensuite à tout le système le mouvement du centre de gravité (54).

Si les deux corps étoient mous, leurs vîtesses après le choc seroient plus grandes que s'ils étoient durs. Car dans le cas de la dureté des deux corps, les vîtesses après le choc seroient aux vîtesses avant le choc, comme Cd à Ca (55); et dans le cas où ils seroient mous, c'est-à-dire, où le ressort se comprimeroit sans se rétablir, ces mêmes vîtesses seroient comme Cd à Cg. Or $Cg < Ca$. Donc, etc.

---

(54) Car ce mouvement étant commun à toutes les parties du système, ces parties n'ont point d'autre action les unes sur les autres que celle qui résulteroit des mouvemens en vertu desquels le centre de gravité resteroit en repos. A l'égard de la vîtesse du centre de gravité on a donné le moyen de la déterminer, *art.* 72.

(55) Dans le cas des corps durs, si ab infiniment petite représente la vîtesse avant le choc, alors tirant Cbc et décrivant l'arc ae, cet arc exprimera la vîtesse après le choc, puisque le centre est supposé rester en repos et que la vîtesse perdue doit être dirigée suivant cb; or $ac : ab :: Cd : Ca$. Dans le cas des corps mous, la vîtesse après le choc sera à la vîtesse avant le choc :: $Cd : Cg$; car les vîtesses d'un corps qui décrit une courbe en vertu d'une force dirigée à un point fixe, sont en raison inverse des perpendiculaires menées de ce point sur les tangentes. Or Cg étant $< Ca$, on a $\frac{Cd}{Cg} > \frac{Cd}{Ca}$. Donc, etc.

SCOLIE GÉNÉRAL.

185. Ce n'est-là qu'une très-petite partie des questions qu'on peut agiter sur le choc des corps. En voici quelques-unes qui méritent l'attention des Géomètres.

I.

Nous avons fait voir dans l'Encyclopédie au mot *Elastique*, Tome V. p. 447. col. 2. que le ressort, quand il rendroit parfaitement aux corps choquans la figure qu'ils ont perdue par le choc, pourroit bien ne leur pas rendre pour cela toute leur vîtesse, et même qu'il ne la leur rendoit pas en effet. Mais la quantité de vîtesse perdue dépend de la figure et de la matière du corps, et ne peut être déterminée que d'une manière hypothétique et conjecturale. En effet imaginons une suite de points ou d'atomes parfaitement durs, disposés en ligne droite, et unis par des ressorts infiniment petits placés entre chaque corps. Ce système de points durs ainsi unis représentera assez exactement un corps à ressort. Supposons ensuite que ce système vienne frapper perpendiculairement un plan inébranlable, suivant la direction de la ligne qui enfile tous ces petits corps. Il est évident que le petit corps dur qui frappera immédiatement le plan, perdra à l'instant toute sa vîtesse. Le second corpuscule, celui qui suit immédiatement le premier, pourra avancer tant soit peu, vu la compressibilité du petit ressort placé entre deux; mais comme ce ressort est (*hyp.*)

infiniment petit, qu'il doit cesser de se comprimer dès que ses parties seront absolument contigues les unes aux autres (ce qui doit arriver très promptement), et que le second corps n'auroit d'ailleurs qu'un chemin infiniment petit à faire pour arriver jusqu'au premier corps, n'est-il pas bien vraisemblable, ou plutôt n'est-il pas certain que ce second corps n'aura pas entiérement perdu son mouvement, avant que d'être arrivé au point de ne pouvoir plus avancer? En ce cas ce qui lui reste de mouvement ou plutôt de tendance au mouvement, s'anéantira tout à coup, comme quand un corps dur choque un plan inébranlable. Il en sera de même de plusieurs des corpuscules suivans. Or tous ces corpuscules qui n'ont perdu qu'une partie de leur mouvement par la compression des ressorts, et qui n'ont pu faire usage du reste, ne recevront par la restitution du ressort que la partie de mouvement que la compression du ressort leur avoit fait perdre, et ne pourront jamais recouvrer l'autre partie qui a été entiérement détruite. Cependant chaque ressort se rétablira dans son premier état, et par conséquent le système reprendra sa première figure et non sa première vitesse. Mais on sent bien qu'il est très-difficile, et comme impossible, de trouver la vitesse de chaque petit corps après la restitution du ressort, et par conséquent la vitesse totale du corps qui est égale à la somme des vitesses partielles divisée par le nombre des corpuscules. Pour trouver la vitesse de chaque petit corps, il faudroit connoître le degré d'étendue et de

roideur de chaque ressort, ce qui doit varier dans chaque cas.

Ce que nous venons de dire du choc d'un corps à ressort contre un plan inébranlable, doit avoir lieu de même dans le choc mutuel de deux corps à ressort, qui doivent nécessairement perdre quelque partie de leur vîtesse par le choc.

On suppose ordinairement que quand un corps à ressort choque un plan inébranlable, il n'y a que la partie infiniment petite placée au point de contact qui perde tout d'un coup son mouvement, et que les autres parties ne perdent le leur que peu à peu, et sont toujours en mouvement pour s'approcher du plan jusqu'à ce que le ressort soit tout-à-fait bandé. Le raisonnement précédent suffit pour montrer combien cette hypothèse est peu conforme à la nature.

II.

Nous avons supposé dans tout le cours des recherches précédentes, que quand deux corps à ressort se choquent avec des vîtesses qui sont en raison inverse de leurs masses, le ressort des deux corps est semblablement et également bandé à chaque instant, ensorte que les vîtesses perdues à chaque instant sont en raison inverse des masses, et que le point d'attouchement reste en repos pendant tout le tems que le ressort se bande et se débande. Or si le ressort des deux corps n'est pas semblable, cette supposition n'aura pas lieu, ce qui peut

peut apporter du changement dans les solutions.

C'est donc une supposition trop limitée et trop peu générale, que celle qui a été faite par plusieurs Auteurs, pour expliquer les lois du choc des corps à ressort. Ils imaginent un ressort placé entre les deux corps, et également bandé par l'un et par l'autre, ensorte que chaque corps perde à chaque instant des quantités de mouvement égales, et que le point du ressort placé au centre de gravité des deux corps reste en repos. Il est visible que cette supposition ne peut représenter clairement que le seul cas où le point de contact reste en repos pendant que les deux corps se compriment et se rétablissent.

III.

Si un corps à ressort vient choquer perpendiculairement un plan inébranlable, et qu'on suppose ce corps à ressort parfait, c'est-à-dire capable de reprendre par son ressort la vîtesse qu'il a perdue par le choc, il est évident que ce corps rejaillira après le choc avec toute sa vîtesse. Mais si dans l'instant où le corps est entiérement applati, et a perdu toute sa vîtesse par le bandement du ressort, on vient tout-à-coup à ôter le plan, il est évident que le ressort étant alors absolument libre, tend à se débander en deux sens contraires, et que les mouvemens qu'il tend à imprimer étant opposés, doivent se détruire mutuellement; d'où il s'ensuit que le corps rejaillira avec une vîtesse beaucoup moin-

dre que dans le premier cas ; il pourra même arriver qu'il ne rejaillisse point du tout, si la figure du corps dans son état de compression étoit telle, que le ressort se débandât également dans les deux sens contraires. Par la même raison si on ôte le plan dans le tems où le ressort n'est pas encore tout-à-fait débandé et rétabli, le corps rejaillira évidemment avec moins de vîtesse que dans le cas du plan immobile.

Or quand le ressort des deux corps est parfaitement semblable, ensorte qu'ils se bandent et se debandent en même tems, le point de contact demeurant immobile durant tout ce tems, ces corps se servent mutuellement d'un appui inébranlable; et l'on conçoit qu'ils doivent rejaillir avec leurs premières vîtesses. Mais si un des ressorts est débandé avant l'autre, le corps dont le ressort est débandé ne peut-il pas alors se séparer de l'autre corps, et la vîtesse avec laquelle ce dernier rejaillit n'en sera-t-elle pas diminuée ?

I V.

Quelles sont les lois du choc d'un corps dur contre un corps à ressort ? Elles se réduisent à savoir ce qui arrivera quand deux corps, l'un dur, l'autre à ressort, se choquent en sens contraire avec des vîtesses réciproquement proportionnelles à leurs masses. Il est évident que dans ce cas le point de contact ne peut être immobile, comme dans celui où les deux corps sont à ressort, et à ressort semblable. Le point immobile (car il

faut qu'il y en ait un) sera donc dans l'intérieur du corps à ressort. Mais ce point immobile sera-t-il toujours le même, ou changera-t-il à chaque instant pendant que le ressort se bande et se débande? Il me semble qu'il doit changer de place. En effet 1°. dans le premier instant de la compression le point immobile doit se trouver infiniment proche du point de contact, ou pour parler plus exactement, très-proche. Car si ce point n'étoit pas très-proche du point de contact, il faudroit donc que la partie finie du corps à ressort, placée entre ce point et le point de contact, changeât brusquement sa vîtesse de positive en négative, ce qu'on ne peut supposer dans un corps à ressort tel que celui dont il est question, et dans lequel toute partie finie doit être supposée perdre sa vîtesse par degrés. Pour le faire sentir, nommons a la vîtesse positive avant le choc, et $-b$ la vîtesse devenue négative dans la partie du corps dont il s'agit; il s'ensuivroit donc que cette partie auroit perdu la vîtesse $a+b$ qui auroit été détruite *brusquement.* Or cela ne se peut dans un corps à ressort tel qu'on le suppose. Le point immobile sera donc au premier instant comme infiniment près du point de contact. 2°. Dans les instans suivans, comme les parties du corps dur ne peuvent céder, et qu'elles avancent toujours, il est évident qu'elles doivent faire reculer le point immobile, lequel se trouve trop près du point de contact, et par conséquent du corps dur, pour rester toujours à la même place. Le point immobile changera donc pendant que le ressort se bande.

Le ressort se débandant ensuite, le point immobile subira en sens contraire tous les changemens qu'il avoit subis pendant la compression; et chacun des deux corps recevra en sens contraire à chaque instant la vîtesse qu'il avoit perdue par le choc. Donc au dernier instant de la restitution la vîtesse de chaque corps sera la même (en sens contraire) qu'au premier instant de la compression. Ainsi les deux corps reprendront en arrière toute leur vîtesse, et les lois du choc des corps durs et des corps à ressort parfait seront les mêmes que si les corps qui se choquent étoient tous deux à ressort parfait.

On voit par ces différentes observations, que nous pourrions étendre encore plus loin, combien de recherches il reste à faire sur les lois du choc des corps, et combien il s'en faut que la matière ait été épuisée par le grand nombre de Géomètres qui l'ont traitée jusqu'ici; ces Géomètres n'ayant examiné que les cas les plus simples et les moins ordinaires.

CHAPITRE IV.

Du Principe de la conservation des forces vives.

186. SI des corps agissent les uns sur les autres, soit en se tirant par des fils ou des verges inflexibles, soit en se poussant, pourvu qu'ils soient à ressort parfait dans ce dernier cas, la somme des produits des masses

par les quarrés des vîtesses, fait toujours une quantité constante; et si ces corps sont animés par des puissances quelconques, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses à chaque instant, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses initiales, plus les quarrés des vîtesses que les corps auroient acquises, si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est dans ces deux principes que consiste ce qu'on appelle *la conservation des forces vives.*

M. *Huyghens* est le premier, que je sache, qui ait fait mention de ces deux principes, et M. *Bernoulli* le premier qui en ait fait voir l'usage, pour résoudre élégamment et avec facilité plusieurs problêmes de Dynamique. J'entreprends de donner dans ce Chapitre, sinon une démonstration générale pour tous les cas, au moins les principes suffisans pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier.

187. Imaginons d'abord deux corps A, B (Fig. 70), d'une étendue infiniment petite, attachés à la verge inflexible AB; et supposons qu'on imprime à ces corps des directions et des vîtesses quelconques, représentées par les lignes infiniment petites AK, BD. Il faut par notre principe, faire les parallélogrammes MC, NL, tels que $LC = AB$, et $B \times BM = A \times AN$; BC et AL seront les vîtesses et les directions des corps B et A. Or $BC^2 = BD^2 - 2CE \times CD - CD^2$, et $AL^2 = AK^2 + 2PL \times KL - KL^2$; donc $B.BC^2 + A.AL^2$

$= A.AK^2 + B \times BD^2 + A(2PL.KL - KL^2)$ $- B(2CE.CD + CD^2)$ qui se réduit à $A.AK^2 + B.BD^2 - A.KL^2 - B.CD^2$, à cause que $CE = PL$ et $A.KL = B.CD$.

On a donc $B.BC^2 + A.AL^2 = A.AK^2 + B.BD^2 - A.KL^2 - B.CD^2$.

Corollaire I.

188. Si NA, BM sont infiniment petites, c'est-à-dire si les vîtesses AL, BC, ne diffèrent qu'infiniment peu des vîtesses AK, BD, la conservation des forces vives aura lieu. Car négligeant dans l'équation les lignes KL, CD, on aura $B.BC^2 + A.AL^2 = A.AK^2 + B.BD^2$.

Corollaire II.

189. Si NA, BM ne sont pas infiniment petites, et qu'on fasse $CF = CD$, $LO = LK$, et en sens contraire, il est aisé de prouver que $BF^2 = BD^2 - 4CE.CD$, et $AO^2 = AK^2 + 4PL \times KL$. Donc $B.BF^2 + A.AO^2 = B(BD^2 - 2BM.2CE) + A(AK^2 + 2.AN \times 2PL) = B.BD^2 + A.AK^2$, parce que $CE \mp PL$ et $A.AN \mp B.BM$.

Donc la conservation des forces vives a encore lieu ici. Mais, si l'on y fait attention, ce cas est précisément celui du choc de deux corps élastiques (*art.* 168).

De la conservation des forces vives dans les corps qui se tirent par des fils ou par des verges inflexibles.

190. Nous avons vu dans l'article précédent, que si

deux corps sont attachés au bout d'une verge inflexible, et qu'on leur donne à chacun une vîtesse quelconque, la conservation des forces vives n'a lieu que quand les vîtesses qu'ils prennent diffèrent infiniment peu des vîtesses qu'ils ont reçues. Or la vîtesse initiale réelle de chacun de ces corps, peut différer d'une quantité finie de celle qu'on a imprimée à chacun suivant une direction quelconque. Mais quand ils ont une fois commencé à se mouvoir chacun sur sa courbe, leur vîtesse ne varie qu'infiniment peu d'un instant à l'autre (56). Ainsi dans le cas de l'article 188 la somme des produits de chaque masse par le quarré de sa vîtesse est toujours égale, non à la somme des produits de chaque masse par le quarré de la vîtesse imprimée à chacune au premier instant, mais par le quarré de la vîtesse initiale réelle de chacune.

191. Il faut donc présentement démontrer en général, que si des corps se meuvent en se tirant par des fils ou

(56) Que les corps A et B joints par la ligne inflexible AB (fig. 71) aient décrit dans un instant les lignes infiniment petites AC, BD, et que dans l'instant suivant au lieu de décrire $CE=CA$, $DF=DB$, (comme ils l'auroient fait s'ils eussent été libres) ils décrivent CH, DK; je dis que les lignes EH et FK qui représentent les mouvemens perdus seront infiniment petites du second ordre.

Car quelle que puisse être la position des points H et K, le centre de gravité g' doit être dans la ligne droite Gg qu'il a décrite au premier instant, et l'on doit avoir $g'g=Gg$ (*art.* 76); donc $g'H=gC=AG$; mais (*art.* 91) $Eg'-AG$ ou (ce qui est ici la même chose) $Eg'-g'H$ est égal à 2 $(AG-Cg)$ moins une quantité infiniment petite du second ordre; donc puisque $AG=Cg$, $Eg'-g'H$ est infiniment petite du second ordre, donc EH l'est aussi: la démonstration est la même pour FK. Donc, etc.

par des verges inflexibles, et que la vîtesse de chacun ne varie à chaque instant qu'infiniment peu, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses sera constante, si les corps ne sont animés d'aucune puissance ; et que s'ils le sont, elle sera égale à la somme des effets des forces motrices pour chaque corps.

Or j'observe d'abord, que le second de ces deux cas suit immédiatement du premier ; c'est-à-dire que le premier étant supposé vrai, le second l'est aussi nécessairement. Car supposons deux corps A, a (Fig. 72) attachés l'un à l'autre par la verge Aa, et animés par des puissances motrices dirigées suivant les lignes quelconques EF, ef, dont la position à chaque instant soit telle qu'on voudra ; que BA, ab soient les lignes que ces corps ont décrites pendant un même instant, et qui peuvent par conséquent représenter leurs vîtesses. Si chacun de ces corps étoit libre, ils décriroient dans l'instant suivant les lignes AO, ao égales et en ligne droite avec AB, ab ; supposant que AD, ad représentassent l'effet des puissances motrices pendant cet instant, leurs vîtesses seroient changées en AN, an ; et menant les perpendiculaires BC, bc sur AC, ac, on auroit $AN^2 = AB^2 + 2.AD.AC$, et $an^2 = ab^2 + 2.ad.ac$; mais comme les vîtesses AB ab sont les vîtesses réelles que les corps ont dans le premier instant, et que les vîtesses AN, an n'en diffèrent qu'infiniment peu, ces mêmes vîtesses AN, an ne diffèrent qu'infiniment peu des vîtesses dans lesquelles elles seront changées par l'action réciproque des deux corps.

Donc,

Donc, si on nomme V, v les vîtesses AB, ab; U, u les vîtesses des corps A, a au second instant, c'est-à-dire les vîtesses qu'ils ont au lieu de AN, an, on aura $A.UU + a.uu = A.AN^2 + a.an^2 = A(AB^2 + 2AD \times CA) + a(ab^2 + 2ad.ca) = A.VV + a.vv + 2A.AD.CA + 2a.ad.ca$. Donc $A(UU - VV) + a(uu - vv) = 2A.AD.CA + 2a.ad.ca$, c'est-à-dire, $2AVdV + 2avdv = 2A.AD.CA + 2a \times ad.ca$, ou (supposant $V = 0$ et $v = 0$ au commencement du mouvement) $AVV + avv = \int 2A.AD.CA + \int 2a.ad.ca$. Mais si les corps A, a se mouvoient librement sur les courbes GA, ga, il est clair que $\int 2A \times AD.CA$ seroit l'effet de la force motrice de A depuis G jusqu'en A, et de même $\int 2a.ad.ca$ l'effet de la force motrice de a depuis g jusqu'en a (57). Donc, etc.

Si au commencement du mouvement, on avoit $V = B$, $v = b$, il est évident qu'on auroit alors $AVV + avv = ABB + abb + \int 2A.AD.CA + \int 2a.ad.ca$.

On voit aisément que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de corps qu'on voudra; car tout ce qu'on a supposé, c'est que si la vîtesse ne varie qu'infiniment peu d'un instant à l'autre, et que les corps ne soient

(57) La force accélératrice en A étant représentée par AD, son action suivant la courbe sera $\frac{AD \times AC}{AB}$; donc si u' est la vîtesse du corps A mû librement sur GA, on aura $\frac{AD \times AC}{AB} \times AB = u'du'$, ou $A \times AD \times AC = Au'du'$: donc $2\int A \times AD \times AC = Au'u'$; or ce qu'on appelle ici l'effet d'une force motrice, est le produit de la masse par le quarré de la vîtesse que cette force peut imprimer.

point animés de forces accélératrices, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses fait toujours une somme constante. C'est donc ce qui nous reste à démontrer en général. Pour cela nous avons besoin des Lemmes suivans.

LEMME XII.

192. *Soit un parallélogramme quelconque* B V b N (Fig. 73); *je dis, que si par un de ses angles quelconques* B, *on tire à volonté la ligne* B D *de grandeur et de position quelconque, et que du point* D *on tire les perpendiculaires* D n, D K, D G *sur* B b, B V, B N *prolongées; on aura* B b . B n = B V . B K + B N . B G.

DÉMONSTRATION.

Des points N, V, b soient menées les perpendiculaires NE, VF, bH sur BD prolongée; on peut regarder les côtés BV, BN comme représentant des puissances décomposées chacune dans les deux BF, VF, et BE, EN; et de même la diagonale Bb comme une puissance décomposée dans les deux BH, bH. Donc, puisque la puissance Bb équivaut aux deux BN, BV, on aura $BE + BF = BH$: or à cause des triangles semblables bHB, BDn, on a $Bb \times Bn = BD \times BH = BD \times BE + BD \times BF = BN . BG + BV . BK$. *Ce qu'il falloit démontrer* (*).

(*) On pourroit démontrer cette proposition, par des principes purement géométriques, sans avoir recours à la Mécanique; mais la démonstration que nous avons donnée, fait voir comment les différentes parties des Mathématiques peuvent s'éclairer mutuellement.

REMARQUE.

193. On voit aisément, que selon la position des points E, F l'un par rapport à l'autre et par rapport au point H, il faudra au lieu de la somme des produits $BN.BG$, et $BV.BK$ prendre leur différence, et la faire égale à $Bb.Bn$.

De la conservation des forces vives quand les corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils.

194. Imaginons que trois corps A, B, C (Fig. 74), soient attachés au fil ABC, et qu'on imprime à ces corps les vîtesses $A\alpha$, $B\beta$, $C\varkappa$, qu'ils soient forcés de changer par leur action mutuelle dans les vîtesses $A\mathrm{A}$, BD, $C\mathrm{C}$, qui seront telles, que $\mathrm{A}D = AB$; $D\mathrm{C} = BC$: il faudra regarder par notre principe les vîtesses $A\alpha$, $B\beta$, $C\varkappa$, comme composées des vîtesses $A\mathrm{A}$, BD, $C\mathrm{C}$, et des vîtesses Aa, Bb, Cc par lesquelles seules les corps A, B, C se feroient équilibre; il faut donc prouver que $A.A\mathrm{A}^2 + B.BD^2 + C.C\mathrm{C}^2 = A.A\alpha^2 + B.B\beta^2 + C.C\varkappa^2$, c'est-à-dire, (58) que $A.Aa.AQ - B.BN \times BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = o$. Or $CM = BK$, et $C.Cc = B.BV$, à cause de l'équilibre. De même $AQ = BG$, et $A.Aa = B.BN$. Donc etc.

Si au lieu du corps A on supposoit un point fixe autour duquel les corps B, C tournassent, on auroit $AQ = o$,

(58) Cette équation revient au même que la précédente, en substituant dans celle-ci à la place de $A\mathrm{A}^2$, BD^2, etc. leurs valeurs qu'on trouve aisément par les propriétés connues des quarrés des côtés des triangles, en ayant de plus égard à l'article 193 précédent, et en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre.

$BG=o$, et la proposition seroit encore vraie. Il est visible par la nature de la démonstration précédente, qu'elle est générale pour tel nombre de corps qu'on voudra.

Si le point B n'étoit pas fixe en sa place, mais pouvoit couler librement le long du fil, alors Bb diviseroit l'angle ABC en deux également, et on auroit $A.Aa = B.BN; B.BV = C.Cc; B.BN = B.BV$; et enfin $AQ - BG = BK - CM$, parce que $AD + DC = AB + BC$; donc $A.Aa.AQ - B.BN.BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = o$.

On voit donc suffisamment que la conservation des forces vives a lieu dans tous les cas possibles, quand les corps ne sont regardés que comme des points, et se tiennent par des fils.

LEMME XIII.

195. *Soient trois corps* A, B, C *animés des puissances* AQ, BR, Cc (Fig. 75), *et en équilibre sur un levier de figure quelconque; et soient* AB, BC *les distances de ces corps l'un à l'autre. Imaginons le levier dans une autre situation quelconque infiniment proche de celle-là, et que les points* F, G, E *soient alors le lieu des corps* A, B, C, *de sorte que* FG = AB; GE = BC : *je dis qu'en menant les perpendiculaires* GK, FX, EZ, *on aura* B.BR.BK = A.AQ.AX + C.Cc.CZ.

DÉMONSTRATION.

Tant que le levier ABC n'est pas droit, cette proposition peut se démontrer de la même manière que si

ABC étoit un fil, parce que chacune des puissances peut toujours se changer en deux autres, dont la direction passe par les points où les deux autres sont appliqués, et que l'on aura ainsi six puissances, égales deux à deux et directement opposées. *Voy. les art.* 192, 193, 194.

Il n'y a que le seul cas où le levier ABC (Fig. 76) est droit, dans lequelle une pareille décomposition ne se peut faire, et pour lequel il est nécessaire de trouver une démonstration particulière. Soient donc AQ, BR, Cc perpendiculaires au levier ABC, on aura $B.BR.BO$ (59) $= C.Cc.CL + A.AQ.AY$; mais les lignes BO, BK; CL, CZ, AY, AX ne diffèrent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles. Donc $B.BR.BK = C.Cc.CZ + A.AQ.AX$. Donc etc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

196. Si le levier ABC (Fig. 77) étoit fixe en quelque point, en Γ par exemple, et qu'on imaginât le levier dans une autre situation $F\Gamma GE$, la proposition seroit encore vraie, et se démontreroit d'une manière semblable.

De la conservation des forces vives, quand les corps se tiennent par des verges inflexibles, et qu'on les regarde comme des points.

197. Il est clair que par le Lemme précédent (60) on

(59) Par la propriété connue des mouvemens de plusieurs forces en équilibre entr'elles.

(60) Il n'y aura qu'à considérer $AQ, AF; BR, BG; Cc, CE$ (fig.

démontrera la conservation des forces vives, quand les corps se tiennent par des verges inflexibles, et que chacun de ces corps est fixe à la verge. Si l'un des corps comme B (Fig. 75) pouvoit couler le long de la verge, alors la vîtesse BR qu'il perdroit, devroit être perpendiculaire à la verge, et il se trouveroit dans l'instant suivant, non au point G tel que $FG = AB$, mais à un point g infiniment proche de celui-là (*). Or à cause que les points B, G sont infiniment proches, et que Gg, BA doivent être censées parallèles, la ligne Gg doit être regardée comme perpendiculaire à BK, et partant on peut prendre Bk et BK l'une pour l'autre, parce que leur différence est infiniment petite du second ordre. Donc la conservation des forces vives a encore lieu dans ce cas.

De la conservation des forces vives, quand les corps sont de masses finies, et qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles.

198. Nous avons vu dans le Lemme XIII. que si trois corps A, B, C animés des forces AQ, BR, Cc de directions quelconques, sont en équilibre, on aura $C.Cc.CZ + A.AQ.AX = B.BR.BK$. D'où il s'ensuit, que si on prend Br égale et contraire à BR (Fig. 75), c'est-à-dire si on cherche la force résultante des deux puissances

75) comme les vîtesses détruites, et les vîtesses restantes aux corps A, B, C, et suivre exactement le même procédé qu'a l'article 195.

(*) On suppose ici que le levier ABC est une courbe aussi bien que FGE, et que BR est perpendiculaire à cette courbe en B. Il a paru inutile de faire pour cela une nouvelle figure.

$C.Cc$, $A.AQ$, on réduira toujours $C.Cc.CZ + A.AQ.AX$ à un seul produit $B.Br.BK$. Ainsi quel que soit le nombre des corps attachés à une verge inflexible, si on prend le point B par où passe la force résultante, et qu'on imagine ce point B parvenu en C, il suffira de prendre le produit de BK par la force résultante, au lieu de la somme de tous ces produits.

Or pour que la conservation des forces vives ait lieu, il faut, comme nous l'avons vu, que la somme de tous ces produits soit $= o$. Donc il faut, ou que la force résultante soit $= o$, ou que BK soit $= o$. Or 1°. quand il n'y a pas de point fixe, la force résultante est $= o$. 2°. Quand il y en a un, la vîtesse du point B doit être nulle, ou au moins sa direction est nécessairement perpendiculaire à la direction de la force résultante. En effet, si l'obstacle est un point Mathématique, comme le point d'appui d'un levier, la direction de la force résultante passe par ce point d'appui, et le mouvement du point B est un mouvement de rotation autour de ce point, ou le point B n'est autre chose que le point d'appui même, dont le mouvement est zéro. Si l'obstacle est une surface immobile, le point B par où passe la direction de la force résultante, est nécessairement un point qui touche cette surface, et dont le mouvement instantané est suivant la direction de cette surface même, tandis que la direction de la force résultante est perpendiculaire à cette surface. Donc en général $BK = o$, quand il y a un point fixe. Il est donc démontré, que quand les corps se tiennent par des leviers

inflexibles, fixes ou non fixes, la conservation des forces vives a lieu.

199. Si les corps se tiennent par des fils, alors on imaginera aux extrémités de chaque portion de fil qui est entre deux corps, deux puissances égales et opposées qui tirent dans la direction du fil, et la démonstration se déduira aisément de ce qui a été dit ci-dessus (*art.* 194) quand les corps étoient regardés comme des points.

200. Si le fil passe à travers un ou plusieurs de ces corps, de manière qu'ils puissent y couler librement, alors comme la direction de la force résultante des mouvemens perdus à chaque instant passe (*art.* 153) par le point de concours G (Fig. 78) des lignes CS, AR, et divise cet angle en deux également; il faudra, au lieu de cette force résultante, imaginer deux puissances égales qui tirent suivant SG, et RG dans la direction des fils CS, AR; de plus si on suppose que SV, RN soient les chemins des points S, R, et qu'on mène les perpendiculaires VD, NP, on aura, à cause de $AR+SC$ constante, $SD=RP$. Moyennant ces deux remarques, on viendra aisément à bout de démontrer dans tous les cas, la conservation des forces vives.

De la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques.

201. Nous pourrions démontrer la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques, en regardant ces corps comme durs, et supposant que la compression

pression et la restitution du ressort se fît dans un instant, nous avons même déja donné dans l'article 189 un essai de démonstration de cette espèce ; mais comme nous avons observé (*art.* 176 *et suiv.*) que cette hypothèse pourroit tromper sur les véritables lois du choc des corps élastiques, nous l'abandonnerons ici, et nous démontrerons la proposition dont il s'agit, en supposant un ressort placé entre les deux corps, et qui leur donne en sens contraires des forces motrices égales.

202. Soient A, B (Fig. 79), deux points unis par un ressort AB, lesquels ayant reçu des impulsions quelconques AG, BF, décrivent les courbes Ama, BMb pendant le tems de la compression et de la restitution du ressort : soit φ la force motrice variable, qui est égale à chaque instant pour les deux corps, et qui les pousse en sens contraires dans la direction du ressort Mm, V la vîtesse de M, u celle de m, G la vîtesse de B, g celle de A, $MV\,dz$, $mu\,dx$, on aura $BVV = BGG - 2\int\varphi\,dz$, et $Auu = Agg + 2\int\varphi\,dx$. Mais lorsque $ab = AB$, on a $2\int\varphi\,dx - 2\int\varphi\,dz = 0$; car $dx - dz$ est la quantité dont le ressort se comprime ou se dilate à chaque instant, et quand $ab = AB$, le ressort est remis dans son premier état. Donc $Auu + BVV = Agg + BGG$, lorsque la compression est finie.

Il est clair que cette démonstration peut s'étendre à tant de points qu'on voudra, liés ensemble d'une manière quelconque. On voit donc que la conservation des forces vives a lieu pour des points liés par des ressorts.

Quand les corps sont finis, il suffit (*art.* 198) pour prouver la conservation des forces vives, de prouver que cette conservation a lieu dans les points par où passe la direction de la force résultante des forces qui se font équilibre; ces points sont dans l'un et dans l'autre corps le point par lequel ils se touchent, et que nous supposons demeurer toujours le point touchant pendant la compression et la restitution, que nous regardons ici comme achevées dans un tems très-court. C'est par ces points qu'il faut imaginer que passe le ressort, qui leur communique en sens contraire à chaque instant des forces motrices égales, qui se distribuent ensuite dans toute la masse. Donc ce cas se trouve par-là réduit au précédent.

203. Si les corps A, B (Fig. 80) se choquoient par le moyen d'une verge CBA fixe en C, alors les forces motrices appliquées en A et en B ne seroient plus égales; mais elles seroient en raison inverse des bras CA, CB, et comme les chemins des points B et A en tems égaux, sont en raison directe de ces bras de levier; il s'ensuit que le produit des forces motrices par le chemin des points A, B seroit égal de part et d'autre. Ainsi on peut encore ici démontrer la conservation des forces vives, soit par le principe de l'*art.* 189, en supposant les corps incompressibles, soit en imaginant un ressort infiniment petit placé en A et un autre en B. Ce qu'il est inutile d'expliquer plus en détail pour des Lecteurs intelligens.

Donc la conservation des forces vives aura encore lieu dans le cas dont il s'agit ici; et il est clair en combinant

les principes établis ci-dessus, qu'on pourra toujours la démontrer dans le choc des corps élastiques.

SCOLIE GÉNERAL.

204. Il résulte de tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, qu'en général la conservation des forces vives dépend de ce principe, que quand des puissances se font équilibre, les vîtesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances. Ce principe est reconnu depuis long-tems par les Géomètres pour le principe fondamental de l'équilibre; mais personne, que je sache, n'a encore démontré ce principe en général, ni fait voir que celui de la conservation des forces vives en résulte nécessairement.

Le principe de l'équilibre dont nous venons de parler, peut toujours se démontrer facilement. Car, ou les puissances sont égales et directement opposées, ou elles sont appliquées à des bras de levier différens, ou enfin la force résultante de ces puissances passe par quelque obstacle fixe et insurmontable, comme dans le Problême X. Tout ce que nous avons dit ci-dessus est, ce me semble, suffisant pour démontrer les deux premiers cas: à l'égard du dernier cas, il est visible que les puissances décomposées dans une direction perpendiculaire à la force résultante seront égales, et que les vîtesses dans ce même sens seront égales aussi. Or de là il est aisé de tirer la démonstration en la cherchant sur quelque cas, par

exemple sur celui du Problême X, où elle est aisée à trouver.

Si la force accélératrice qui anime les corps est la gravité g, et que x, z etc. soient les abscisses verticales des courbes qu'ils décrivent, on aura (*art.* 191) $AVV+avv$ etc. $= 2Agx+2agz$ etc. en supposant, comme dans la démonstration de cet *art.* 191, que les corps partent du repos; et si les corps partoient avec les vîtesses initiales B, b, on auroit $AVV+auu$ etc. $= ABB+abb+2Agx+2agz$ etc. Il est à remarquer que si z est négative par rapport à x, c'est-à-dire, si le corps a monte tandis que le corps A descend, il faudra mettre $-2agz$. Par exemple si deux corps égaux sont attachés à un levier dont les bras soient c, e, et que celui de ces deux corps qui agit par le plus long bras de levier c, entraîne l'autre et le force à se mouvoir de bas en haut, on aura $AVV+Auu$ ou $AVV+\frac{AVVee}{cc} = 2gAx-2gAz = 2gAx-\frac{2gAex}{c}$; d'où l'on tire $VV = \frac{2gx(cc-ce)}{cc+ee}$; équation qu'on trouveroit aisément d'ailleurs, soit par notre principe, soit par d'autres.

Il est de plus aisé de voir que la quantité $2Agx+2agz$ etc. est égale en général au produit de la somme des poids par le double de la descente du centre de gravité. Car la descente du centre de gravité,

comme il est aisé de le démontrer par la Statique, est $\frac{Agx + agz \text{ etc.}}{Ag + ag \text{ etc.}}$. Ainsi dans le cas où les corps sont pesans, la somme des forces vives à chaque instant est égale à la somme des forces vives initiales, plus à la force vive d'un poids unique égal à la somme de tous les poids, lequel descendroit librement d'une hauteur égale à la quantité dont le centre de gravité est descendu.

De la conservation des forces vives dans les fluides.

205. Soit un vase de figure quelconque et indéfini $POTQ$ (Fig. 81) dont la partie $ADCZ$ terminée par les parallèles AD, CZ soit remplie de fluide. Soit imaginé ce fluide divisé en tranches FKG parallèles à AD; et que tous les points de chaque tranche soient animés par une force accélératrice représentée par l'ordonnée correspondante kf de la courbe dfb, (les ordonnées ad représentant les forces accélératrices positives, c'est-à-dire, qui tendent de L vers B, et les ordonnées kf celles dont la direction est en sens contraire); je dis que si le fluide en cet état est en équilibre, l'aire ou surface $adnmobc$ sera zéro, c'est-à-dire, la somme des aires positives égale à la somme des aires négatives.

Car pour l'équilibre, il faut qu'une tranche quelconque FKG soit pressée également de bas en haut, et de haut en bas : or la pression de la tranche FKG suivant LB, est la même que si elle étoit chargée du cylindre

$EHFG$, dont le poids, en appellant LK, x, et φ la force accélératrice de chaque tranche, sera $FG \times \int \varphi dx$, ou $FG \times (adin - nfk)$; on prouvera de même que la pression de FG suivant BK, sera $FG\,(kfm - mog + gcb)$ et comme ces deux pressions doivent être égales, on aura $adin - nfk = kfm - mog + gcb$, et $adin - nfkm + mog - gcb = 0$. Donc etc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

206. Si au lieu de la force accélératrice φ on substitue la petite vîtesse du qui lui seroit proportionnelle, le tems étant constant, c'est-à-dire, la petite vîtesse avec laquelle chaque tranche, considérée comme isolée, descendroit dans un instant, on aura $\int du\,dx = 0$. Donc si le fluide se meut vers AB, et que du représente la vîtesse perdue ou gagnée par chaque tranche, c'est-à-dire, (*art.* 60) la vîtesse par laquelle chaque tranche seroit restée en équilibre avec les autres, on aura $\int du\,dx = 0$.

COROLLAIRE II.

207. Nous avons fait voir ci-dessus en général (*art.* 191) que la conservation des forces vives quand les corps sont animés par la pesanteur ou par une force accélératrice quelconque, dépend de la conservation des forces vives quand il n'y a point de forces accélératrices. Nous nous contenterons donc de prouver, que si un fluide $ADCZ$, poussé et mis d'abord en mouvement par quelque cause

(comme par un piston) se meut dans le vase $POTQ$, abstraction faite de la pesanteur, la conservation des forces vives aura lieu.

Pour cela, nous imaginerons le fluide partagé en tranches égales et infiniment petites, dont la masse sera appellée m, et dont l'épaisseur sera dx et y la largeur; on aura ainsi $m = y\,dx$. Si on appelle u la vîtesse de chaque tranche, et $u + du$ sa vîtesse dans l'instant suivant; il faudra par notre principe, que les tranches animées des vîtesses du se fassent équilibre, c'est-à-dire, que $\int du\,dx$ sera $= 0$ (*Cor. précéd.*) Mais pour démontrer la conservation des forces vives, il faut prouver (61) que $\int m\,u\,du = 0$: or $u = \frac{1}{y}$, puisque la vîtesse de chaque tranche est en raison inverse de sa largeur; $m = y\,dx$; donc $\int m\,u\,du = \int du\,dx = 0$. Donc, etc.

AVERTISSEMENT.

M. *Daniel Bernoulli* dans son excellent Ouvrage qui a pour titre : *Hydrodynamica* etc. a tiré les lois du mouvement des fluides dans des vases, de la conservation des forces vives, mais sans la démontrer. Comme notre principe général exposé *art.* 60, nous a conduit à en trou-

(61) Si $\int m\,u\,du = 0$, et qu'on nomme u' la vîtesse de la même tranche dans l'instant suivant, on aura (en faisant $y\,dx$ ou m constant, ce qui est permis), $\int \frac{m\,u'\,u' - m\,u\,u}{2} = 0$ (puisque $\frac{m\,u'\,u' - m\,u\,u}{2} = m\,u\,du$); donc $\int m\,u'\,u' = \int m\,u\,u$.

ver la démonstration, il est évident que nous aurions pû déduire immédiatement de ce même principe le mouvement du fluide, ce qui auroit encore été plus lumineux et plus direct. Mais comme notre dessein n'est point de traiter ici des fluides, nous nous sommes contentés de faire voir en deux mots l'usage de notre principe dans une matière qui paroît si épineuse. Nous nous contenterons donc ici de ce leger essai, et nous renverrons ceux qui désireroient un plus grand détail, à notre *Traité de l'équilibre et du mouvement des Fluides*, dans lequel nous avons déduit de notre principe général, la solution des Problêmes les plus difficiles qu'on ait jusqu'à présent proposés sur cette matière.

FIN.

Quoique

Quoique l'Ecrit suivant soit étranger à l'objet de ce Traité, cependant comme il a trop peu d'étendue pour être publié séparément, et qu'il a rapport au dernier Ouvrage que j'ai mis au jour, j'ai cru qu'on me permettroit de l'insérer ici.

LES réflexions que j'ai faites sur les Tables de la Lune, dans la troisième Partie de mes *Recherches sur le système du Monde*, publié en 1756, ont donné lieu à quelques observations, auxquelles je vais tâcher de répondre; et j'espère que cette réponse suffira, sans multiplier davantage les écrits, pour mettre au fait des questions controversées, le petit nombre de Juges qui sont à portée d'en connoître.

I. Si le Problême des monvemens de la Lune, sur lequel plusieurs Géometres se sont exercés, pouvoit être résolu exactement et rigoureusement, il n'y auroit entre ces Géomètres aucun sujet de partage sur le degré de perfection dont la solution est susceptible. Mais dans l'état où est aujourd'hui l'Analyse, le Problême dont il s'agit ne peut être résolu que par approximation, c'est-à-dire d'une manière qui est toujours nécessairement imparfaite. Or il m'a paru, et je n'en répéterai point ici les raisons qui, ce me semble, ne peuvent être combattues, que la multitude des quantités qu'on est forcé

de négliger dans ce Problême, jetoit beaucoup d'incertitude sur la valeur des coefficiens des équations qu'on trouve par la théorie; je ne vois pas comment on peut être assuré *à priori* d'avoir déterminé la valeur d'aucun de ces coefficiens à une minute près; il y en a même sur lesquels je crois que l'erreur peut aller fort au-delà, puisque ceux qui prétendent avoir fait ces calculs avec le plus de besoin, ont varié quelquefois de deux minutes et plus dans les déterminations successives d'un même coefficient. Je n'ai cependant point donné ces doutes sur l'exactitude *rigoureuse* de la théorie pour des raisons démonstratives, mais pour de fortes présomptions, le seul genre de preuves qu'on puisse employer dans cette matière. Elles paroissent avoir frappé M. Euler ainsi que moi, comme on le peut voir pag. 18 de la troisième Partie de mes *Recherches sur le systême du Monde;* et ce grand Analyste s'est exercé assez long-tems sur la théorie de la Lune, pour en connoître parfaitement les difficultés. D'ailleurs il ne faudroit, ce me semble, que l'erreur dans laquelle les Géomètres ont été long-tems par rapport au mouvement de l'apogée, pour les rendre très-circonspects dans leurs assertions sur cette matière; ils ont cru que la théorie ne faisoit trouver que la moitié de ce mouvement, parce qu'ils supposoient faussement que les quantités qu'ils négligeoient ne pouvoient jamais donner qu'un résultat très-petit; ce résultat négligé et regardé comme presque insensible, étoit pourtant de près d'un degré et demi; qui osera répondre après cela

d'une minute et plus d'erreur dans la valeur des autres coefficiens ? On seroit d'autant moins fondé à le prétendre, que la différence, s'il y en a, est ici toute à l'avantage du mouvement de l'apogée. Ce mouvement étant très-considérable, et de 3° à chaque révolution, il faut nécessairement ou que la solution du Problême de la Lune soit mauvaise, ou qu'elle donne ce mouvement à peu près tel qu'il est ; trois ou quatre minutes d'erreur sur trois degrés ne seront ici d'aucune considération ; mais une ou deux minutes le seront sur certains coefficiens de l'équation lunaire, sans qu'il en résulte pour cela d'erreur trop grande sur le mouvement total de la Lune. En un mot pour pouvoir compter sur l'exactitude d'un coefficient, il faudroit être assuré, 1°. que la série qui exprime ce coefficient est *constamment* et *rapidement* convergente. 2°. Qu'on n'a négligé dans cette série aucun des termes qui pouvoient être de quelque considération. Or je le demande à tous ceux qui ont travaillé à la théorie de la Lune ; peut-on jamais rester sans nuage sur ces deux points dans les calculs énormes et très-compliqués que cette théorie demande ? Ce ne seroit pas ici le premier Problême qu'on ne pourroit résoudre par approximation que jusqu'à un certain point, et il n'y auroit à cela rien de surprenant. Aussi les partisans les plus déclarés et les plus exclusifs de la théorie conviennent-ils que le *succès* seul peut en constater l'exactitude ; pour lors les raisons de douter céderont aux faits. Mais ils conviendront aussi que jusqu'à présent on n'est point en-

core arrivé à ce succès; puisqu'après des calculs immenses, l'erreur des Tables s'est encore trouvée de plus de 4′ sur 100 observations.

II. C'est par toutes ces raisons qu'en publiant mes Tables, je n'ai pas cru devoir rien prononcer sur leur degré d'exactitude, me contentant d'inviter les Astronomes à s'en assurer. J'aurois fait moi-même cet examen si des occupations indispensables me l'eussent permis; mais pour le faciliter aux Astronomes, j'ai publié au commencement de 1756 des *Tables de correction*, dont le calcul est très-expéditif, et par le moyen desquelles on peut vérifier très-promptement les résultats de la théorie. Personne n'ignore que depuis le commencement de ce siècle les Astronomes ont observé et calculé avec soin un grand nombre de lieux de la Lune, et inscrit dans leurs registres la différence du calcul à l'observation; il n'y aura plus qu'à appliquer les Tables de correction aux lieux calculés, pour voir si ces Tables donnent le lieu de la Lune plus exactement, ce qui ne demande que très-peu de travail. Cet usage si simple et si naturel de mes Tables de correction suffiroit, non-seulement pour justifier la peine que j'ai prise de les dresser, mais pour les faire préférer à des Tables entiérement nouvelles, dont la comparaison avec les observations sera toujours sans comparaison plus longue et plus épineuse. C'est aussi cet usage que j'ai eu principalement en vue en publiant mes Tables, et qui doit, ce me semble, sauter aux yeux de tous les Géomètres et

de tous les Astronomes ; ce qui me justifie suffisamment de n'y avoir pas autant insisté que quelques Lecteurs auroient paru le vouloir. Il me suffit que ces Lecteurs ne puissent se dispenser de reconnoître cet avantage de mes Tables, et de l'approuver. Mais ce n'est pas le seul. L'expérience montre que les Astronomes ont beaucoup de peine à se détacher de la forme de Tables qu'ils ont une fois adoptée, surtout lorsqu'ils ne connoissent pas assez le degré d'exactitude des nouvelles Tables qu'on leur présente. Ainsi quand ils auront observé eux-mêmes un lieu de la Lune, ils trouveront encore plus simple de calculer d'abord ce lieu par les Tables dont ils se servent pour l'ordinaire, d'examiner la différence du lieu calculé à celui qu'ils auront observé, et de voir enfin (par un calcul d'un moment) si des Tables de correction diminuent ou non cette différence, que de calculer d'abord le lieu de la Lune par de nouvelles Tables qu'on leur aura présentées.

III. Ces réflexions au reste tombent beaucoup plus sur la grande utilité dont peuvent être en général des Tables de correction pour vérifier la théorie, que sur l'avantage particulier qu'on peut tirer des miennes. Encore une fois, je me suis proposé simplement d'offrir aux Astronomes dans ces Tables les résultats que la théorie m'avoit donnés ; tout ce que j'ai dit dans mon Ouvrage, prouve assez que je n'ai point prétendu répondre de ces résultats. Le calcul, par exemple, m'a donné la *variation* sensiblement plus petite que dans les autres

Tables, et j'ai cru sur des raisons qu'on a trouvées plausibles, et qui le sont en effet, que les Astronomes pouvoient l'avoir faite trop grande. Mais il se pourroit que je l'eusse aussi trop diminuée, et que j'eusse en même-tems un peu trop augmenté l'*évection*. J'avertis cependant que j'ai calculé ces deux élémens avec un soin et une patience extrêmes, en ne négligeant que les quantités du même ordre que la cinquième puissance de l'excentricité; et si ces termes négligés avoient pu produire une erreur de deux minutes, je n'en serois que plus convaincu de ce que j'ai avancé sur l'incertitude où l'on est toujours dans la théorie de la valeur des quantités qu'on néglige. Cependant avant que de prononcer définitivement sur la valeur que j'ai donnée à la *variation* et à l'*évection*, il sera bon d'examiner si la différence du lieu calculé au lieu observé, ne viendra pas en très-grande partie des autres termes de l'équation lunaire, dont plusieurs sont jusqu'ici très-incertains, et très-différens dans toutes les Tables. Enfin des Tables de correction, quelles quelles soient, auront toujours un avantage, c'est que les équations en étant fort petites, il sera plus aisé de voir en quoi peuvent pécher ces équations, et de les faire approcher davantage de la vérité, que de pratiquer cette opération sur des Tables entiérement nouvelles. Quand par ces différens moyens, on aura donné aux Tables de correction toute la perfection possible, il sera facile pour lors de les refondre dans les anciennes Tables.

IV. Les Tables que j'ai choisies pour y appliquer des Tables de correction, sont celles des *Institutions Astronomiques*, 1°. parce que ces Tables sont celles dont les Astronomes me paroissent faire actuellement le plus d'usage, le calcul en étant incomparablement plus court que celui de quelques autres Tables publiées depuis. 2°. Parce qu'ayant été comparées à un très-grand nombre d'observations dans toutes sortes de circonstances, on peut se flatter de connoître assez bien le degré d'erreur dont elles sont susceptibles, et que M. le Monnier assure monter rarement à 5′. 3°. Enfin parce que l'erreur de ces Tables est toute calculée pour une quantité considérable de points. En effet on a déja l'erreur des Tables de Halley pour une période entière : or l'on sait que les Tables des *Institutions* ne différent que très-peu de celles de Halley, quant au résultat et quant à la forme ; elles ne s'en écartent que sur deux points, auxquels il est très-aisé d'avoir égard. On sait de plus que M. le Monnier continue sur ses propres Tables, ce que Halley a fait sur les siennes, pour en déterminer l'erreur à chaque période, et qu'il publie de tems en tems le résultat de son travail.

V. De tous les Mathématiciens qui ont donné en dernier lieu des Tables de la Lune, M. Mayer est celui qui se flatte le plus d'avoir approché de la vérité. On assure que M. Bradley y ayant comparé depuis peu plus de 300 observations, n'a pas trouvé une minute de différence; ce qui sup pose, ce me semble, que M. Mayer a

fait quelques corrections à ses premières Tables; car les observations qu'il avoit d'abord comparées à son calcul (les seules qui aient été publiées jusqu'ici) s'en éloignoient quelquefois de deux minutes, *même dans les Syzygies.* C'est cette différence qui avoit principalement fait naître mes premiers doutes sur l'exactitude des Tables de M. Mayer. Car elles avoient le défaut auquel de bonnes Tables ne paroissoient pas devoir être sujettes, de n'être pas plus exactes dans les syzygies qu'ailleurs; et l'exactitude qu'elles donnoient dans les syzygies n'étoit guères plus grande que celle des Tables Newtoniennes, s'il est vrai, comme on le prétend, que les premiers Astronomes qui avoient borné à 2′ le degré d'erreur de ces dernières Tables, ne les eussent guères vérifiées que dans les syzygies. Quoiqu'il en soit, bien loin de refuser à M. Mayer la justice qui lui est due, je desire au contraire que l'exactitude de ses Tables soit en effet constatée de plus en plus; 1°. Parce que ces Tables sont de la forme la plus expéditive pour le calcul. 2°. Parce que si l'erreur de ces Tables ne va pas au-delà d'une minute, comme on l'assure, il n'y a guères lieu d'espérer que la théorie donne jamais une exactitude plus grande; car les Tables formées sur la théorie présentent un très-grand nombre de coefficiens, dont aucun, de l'aveu de tout le monde, ne peut être réputé exact à quelques secondes près : or quelques secondes d'erreur sur plusieurs coefficiens seront bientôt une minute sur le total. 3°. Enfin parce que M. Mayer a vraisemblablement

dressé

dressé ses Tables, moitié sur une théorie qui ne paroît pas avoir été fort rigoureuse, moitié sur une espèce de tâtonnement éclairé par les observations; ce qui serviroit à confirmer l'opinion où je suis, qu'on peut construire plus promptement et plus exactement des Tables de la Lune, en joignant les observations à la théorie, qu'en employant la théorie seule, ou les observations seules. Ce n'est pas que je ne convienne de la grande utilité, de la nécessité même de la théorie, pour perfectionner les Tables; ce n'est pas non plus que je veuille blâmer les Géomètres qui croyent pouvoir s'en contenter. Mais je crois l'autre méthode plus courte et plus sûre, et c'est celle-là que je me propose d'employer, si mes occupations ne permettent de terminer mon travail sur la Lune; travail qui ne demande plus que de la patience et du tems, et dans lequel je ne serai point fâché d'être prévenu par d'autres. Il me suffira d'avoir résolu le Problême des trois corps par une méthode, qui n'est je crois inférieure à aucune des méthodes connues, et d'avoir fourni aux Géomètres, comme je l'ai fait, un grand nombre de vues pour tirer tout le parti possible de la solution de ce Problême, vainement cherchée jusqu'à ces derniers tems.

VI. Il n'est pas douteux qu'il n'entre d'autres quantités que l'excentricité dans l'équation du centre de la Lune; il ne faut qu'avoir calculé avec exactitude cette équation pour en être convaincu. On peut même prouver qu'en ayant égard à cette remarque, et réduisant

toutes les Tables à la même forme, les différentes équations du centre s'accordent à très-peu-près. Mais cela n'a pas dû m'empêcher de dire un mot de la diversité entre les excentricités trouvées par différens Géomètres et Astronomes, et d'en laisser, comme je l'ai fait, la décision aux observateurs à venir; cet élément de la théorie de la Lune ne pouvant être trop examiné.

VII. La comparaison des deux méthodes dont on peut se servir pour trouver l'erreur du mouvement moyen, est en elle-même peu importante, puisqu'on est à peu près le maître de préférer celle des deux qu'on juge à propos; j'ai donc cru qu'il étoit inutile d'employer une méthode sévère et pénible pour cette comparaison; et je lui en ai préféré une autre, moins rigoureuse à la vérité, mais aussi d'une utilité plus générale, et qui donne lieu, comme on en est convenu, à des remarques curieuses. D'ailleurs les Astronomes diffèrent entr'eux de près de $15''$ sur la quantité qu'il faut ajouter au lieu moyen pour corriger les Tables de Halley; il auroit fallu discuter les raisons de cette différence, et cette discussion m'auroit mené trop loin, d'autant qu'elle n'étoit pas essentielle.

VIII. Quand j'ai donné une méthode plus abrégée que celle des *Institutions* pour calculer le lieu de la Lune, je n'ai pas prétendu que le résultat des deux méthodes dût être absolument le même; cela n'est nullement nécessaire; il suffit que la différence des résultats soit d'un côté considérablement plus petite que le ré-

sultat total, et de l'autre fort au-dessous de l'erreur dont les Tables des *Institutions* sont susceptibles. Il y a de plus deux manières de simplifier des Tables; soit en réduisant plusieurs équations à une seule, qui donnent ou exactement, ou à peu près le même résultat; soit en retranchant celles qui paroissent n'être pas nécessaires; c'est pour cette dernière raison que j'ai retranché quelques équations, comme une seconde équation du moyen mouvement que le calcul m'a fait trouver trop petite pour mériter attention. Au reste il me seroit aisé de prouver (mais cela est en soi fort peu important) que j'avois trouvé les abrégés dont il s'agit, avant la publication des Tables de M. Mayer.

IX. La méthode de trouver les coefficiens des équations lunaires par la théorie, ne peut être pratiquée que par un très-petit nombre de Géomètres. Au contraire celle que j'ai donnée de trouver ces coefficiens par les seules observations, peut être mise en usage à la fois par un très-grand nombre d'Astronomes, en se servant de tous les moyens de simplification que je leur ai fournis. Sans être attachés à aucune théorie, ils auront du moins l'avantage de connoître déja à peu près par les différentes théories qui ont été publiées la valeur des principaux coefficiens, et cette connoissance peut abréger et simplifier leur travail. Un tâtonnement éclairé pourra leur apprendre le reste; et pourquoi ne s'en flatteroit-on pas, lorsqu'on voit ce qu'un pareil tâtonnement a donné vraisemblablement d'exactitude aux Tables de M. Mayer?

D'ailleurs c'est pour fournir aux Astronomes tous les secours qu'ils peuvent attendre de l'analyse, que j'ai donné la méthode dont il s'agit. Dans une matière telle que celle-ci, on ne sauroit se procurer un trop grand nombre de ressources, et de trop d'espèces. C'est par la même raison que j'ai donné en passant la méthode de dresser des Tables d'après la formule du lieu moyen, dont on ne peut contester l'utilité, au moins quand il sera question de trouver le tems par le lieu.

X. Si je n'ai point construit des Tables du mouvement horaire, c'est qu'il m'a paru que tout Astronome pouvoit les construire avec beaucoup de facilité et de promptitude, par la méthode fort simple que j'ai expliquée. Au reste je ne puis croire (vu le peu de certitude qu'on a sur l'exactitude des coefficiens) que la théorie donne, au moins jusqu'ici, le mouvement horaire à une seconde près; une minute d'erreur sur la seule *variation*, donne plus d'une seconde d'erreur dans le mouvement horaire, et il est aisé de juger par la seule inspection des différentes Tables publiées jusqu'ici, que ces Tables doivent différer de plusieurs secondes dans la détermination de ce mouvement. Je ne croi pas non plus que dans aucun cas, par exemple dans la recherche de la parallaxe, il soit nécessaire d'avoir égard aux erreurs d'une seconde dans la détermination du mouvement horaire, tant à cause de l'incertitude qui reste encore dans ce mouvement, que parce qu'il s'en faut beaucoup qu'on puisse déterminer à une seconde près la parallaxe, cet élément si incertain par tant de raisons.

XI. Je finirai par une réflexion qui ne doit pas être passée sous silence. Les différens objets de contestation agités aujourd'hui entre les Géomètres sur la théorie de la Lune, ne doivent pas paroître surprenans, puisqu'ils roulent sur des points que le calcul et l'observation n'ont pas encore suffisamment décidés, et sur lesquels il n'est pas étonnant qu'on se partage aujourd'hui, pour se rapprocher sans doute un jour, lorsque le tems aura pleinement fixé tout ce qu'on peut attendre de la théorie. Mais un point essentiel, et dont tous les Géomètres conviennent unanimement, c'est que la théorie, dans l'état où elle est, fournit les preuves les plus convaincantes du système de la gravitation, et de l'accord de ce système avec les mouvemens de la Lune.

DYNAMIQUE.

Addition de l'Auteur à l'article 176.

DANS cet article, qui est exactement semblable à l'art. 145 de la première édition, j'ai remarqué qu'il y avoit des cas où une boule, qu'on suppose infiniment dure, rencontrant à la fois quatre autres boules, ne communique point de mouvement à deux de ces boules, mais seulement aux deux autres.

Ce que j'ai avancé sur ce sujet, quoiqu'appuyé par des preuves qui me semblent démonstratives, n'a pas frappé de même un savant géomètre, qui a cru pouvoir assigner les vîtesses des cinq corps après le choc. C'est ce que je vais examiner.

Soit a la vîtesse de la boule A (Fig. 62), dont je suppose que A soit la masse, et AL la direction avant le choc; D la masse de chacune des boules D et C, dont je suppose, que la vîtesse avant le choc soit parallèle à AL, et $= b$; enfin soit E la masse de chacune des boules E, F, dont je suppose que la vîtesse avant le choc soit parallèle à AL, et $= c$; il est visible que b et c doivent chacune être plus petites que a.

Cela posé,

Si on nomme l'angle LAD, α, et l'angle LAE,

$\mathcal{C}$, x la vîtesse perdue par la boule A suivant AL, z la vîtesse communiquée aux boules D, C, suivant AD et AC, et y la vîtesse communiquée aux boules E, F, suivant AE, AF; on aura par notre principe de Dynamique, les trois équations suivantes :

$$(a - x)\cos.\alpha = z + b\cos.\alpha.$$
$$(a - x)\cos.\mathcal{C} = y + c\cos.\mathcal{C}.$$
$$Ax = 2Dz\cos.\alpha + 2Ey\cos.\mathcal{C}.$$

D'où l'on tire

$$x = \frac{2D(a-b)\cos.\alpha^2 + 2E(a-c)\cos.\mathcal{C}^2}{A + 2D\cos.\alpha^2 + 2E\cos.\mathcal{C}^2}$$

Par conséquent la vîtesse $a - x$ de la boule A après le choc, sera

$$\frac{Aa + 2Db\cos.\alpha^2 + 2Ec\cos.\mathcal{C}^2}{A + 2D\cos.\alpha^2 + 2E\cos.\mathcal{C}^2}.$$

La vîtesse $z + b\cos.\alpha$ de la boule D suivant AD, sera égale à $(a-x)\cos.\alpha = \frac{(Aa + 2Db\cos.\alpha^2 + 2Ec\cos.\mathcal{C}^2)\cos.\alpha}{A + 2D\cos.\alpha^2 + 2E\cos.\mathcal{C}^2}$.

Et la vîtesse de la boule E suivant AE sera de même, et par les mêmes raisons $= \frac{(Aa + 2Db\cos.\alpha^2 + 2Ec\cos.\mathcal{C}^2)\cos.\mathcal{C}}{A + 2D\cos.\alpha^2 + 2E\cos.\mathcal{C}^2}$.

Ces formules sont précisément semblables à celles que le savant Géomètre dont il s'agit, a trouvées par une méthode particulière; sur laquelle néanmoins on pourroit lui faire, ce me semble, quelques difficultés très-bien fondées, dans le détail desquelles je n'entrerai point ici. Quoiqu'il en soit, comme ce résultat

est le même par sa méthode et par la mienne, c'est uniquement à ce résultat que je vais m'attacher.

Je dis donc qu'il faut nécessairement que les vîtesses des corps D, E, après le choc, estimées suivant AD, AE, soient plus grandes que les vîtesses b, c, de ces mêmes corps avant le choc, estimées aussi suivant AD, AE; car, si les vîtesses étoient égales avant et après le choc, il n'y auroit point eu d'impulsion; et il est absurde de dire qu'elles puissent être plus petites, puisque l'effet nécessaire du choc est d'augmenter la vîtesse du corps choqué.

Il faut donc qu'on ait

$$A\,a + 2\,E\,c\cos.\,\mathfrak{C}^2 > A\,b + 2\,E\,b\cos.\,\mathfrak{C}^2;$$

Et de plus

$$A\,a + 2\,D\,b\cos.\,\alpha^2 > A\,c + 2\,D\,c\cos.\,\alpha^2.$$

Soit supposé comme à l'art. 176, $c = 0$; il est visible que la seconde condition aura lieu, et que par conséquent les boules E, F, recevront du mouvement par le choc de la boule A; mais la première condition n'aura lieu qu'au cas que $A\,a$ soit $> A\,b + 2\,E\,b\cos.\,\mathfrak{C}^2$.

Donc si b diffère très-peu de a, comme je l'ai supposé, ensorte que $b = a - \omega$, ω étant une très-petite quantité, il faut pour que les boules C, D reçoivent quelque mouvement par le choc de la boule A, que la boule E soit assez petite pour qu'on ait $A\,\omega > 2\,E\,b\cos.\,\mathfrak{C}^2$. Dans tout autre cas les boules C, D,

ne recevront point de nouveau mouvement par le choc de la boule A; elles conserveront seulement la vîtesse b qu'elles avaient avant le choc; et tout se passera, ainsi que je l'ai dit dans l'endroit cité, de la même manière que si la boule A choquoit les boules E, F, seules.

En effet, la vîtesse des boules A, E, F, sera pour lors la même que si les boules D, C étoient absolument nulles, puisque ces boules ne contribuent en rien à altérer le mouvement de la boule A.

Prenons le cas où $A\,a$ est $= A\,b + 2\,E\,b \cos. \mathcal{C}^2$; c'est celui où les boules D, C, commencent à ne plus être poussées par le corps A. On a pour lors $z = o$, et la vîtesse des boules E, F, qui est $= \frac{(A\,a + 2\,D\,b \cos. \alpha^2 + 2\,E\,a \cos. \mathcal{C}^2) \cos. \mathcal{C}}{A. + 2\,D \cos. \alpha^2 + 2\,E \cos. \mathcal{C}^2}$, se réduit (en mettant pour $A\,a$ la valeur $A\,b + 2\,E\,b \cos. \mathcal{C}^2$, et en remarquant que $c = o$) à la simple valeur de $b \cos. \mathcal{C}$, ou $\frac{A\,a \cos. \mathcal{C}}{A + 2\,E \cos. \mathcal{C}^2}$, à cause de $A\,a = A\,b + 2\,E\,b \cos. \mathcal{C}^2$; ainsi tout se passe exactement comme si D et C étoient $= o$.

A plus forte raison dans les autres cas, où z sera une quantité négative, et par conséquent impossible dans l'hypothèse présente, le choc des boules A, E, F, devra seul être considéré.

On remarquera même, que quoique la seconde condition ait toujours lieu, savoir, $A\,a + 2\,D\,b \cos. \alpha^2$

$> Ac + 2Dc \cos. \alpha^2$ (au moins lorsque $b > c$); cependant lorsque z se trouve négative, les formules trouvées ci-dessus pour les vîtesses des boules A, E, F, après le choc, ne peuvent plus servir, à moins que dans ces formules on ne regarde comme nuls les termes où se trouve D; parce qu'encore une fois les boules D, C, doivent être regardées alors comme n'existant pas.

En voilà assez pour faire voir que je me suis exprimé très-exactement dans l'endroit cité. On peut examiner de la même manière et par les mêmes règles, le cas où c ne seroit pas $= 0$, ainsi que ceux où b seroit $< c$.

FIN.

Fautes à corriger.

Page 33, dernière ligne, lisez $\phi\, d\, t^2$. Page 78, ligne 18, $a\, b$, $a\, d$. Page 98, ligne 8, $\frac{g\, u^n\, r^n}{t^n}$, lig. 9, $\frac{k\, u^n\, r^n}{t^n}$. Pag. 102, lig. 19, $C = f$. Page 105, ligne 4, $B\, Q$. Page 114, ligne 20, $= \frac{b\, d^3\, z}{d\, x}$. Page 115, ligne 2, $+ h\, d\, x$. Page 121, ligne 2, $\frac{P\, d\, s}{d\, x}$. Page 126, ligne 5, $\frac{T\, d\, x}{d\, t}$. Ligne 17, fig. 37. Page 141, ligne 6, $P\, M\, N$. Page 144; ligne 10, $- d\, d\, y$. Ligne 16, $x +$. Page 146, ligne 6, 17 et 20, $Y\, d$. Page 148, ligne 5, $\frac{1}{v}$. Page 151, ligne 2, $pt + r$ etc. Page 200, ligne 14, G. Page 203, ligne 15, $\left(d\, x + \frac{2\, d\, \zeta}{\sqrt{[1 - \zeta\, \zeta]}}\right)^2$. Page 223, ligne 5, $\frac{u\, .\, C\, G}{C\, A} = \frac{v\, .\, c\, g}{c\, a}$. Page 254, ligne 17, $C\, E =$. Ligne 18, $A\, .\, A\, N =$. Pl. III. fig. 40, $S\, R$.

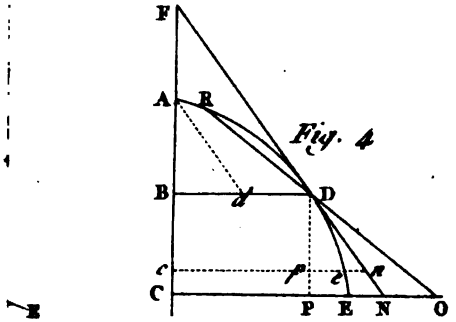


Fig. 4

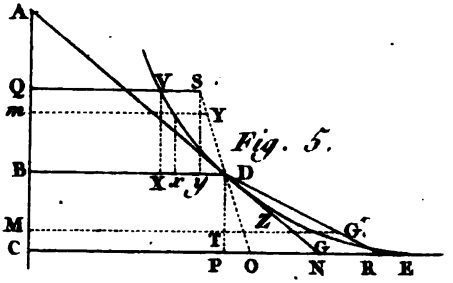


Fig. 5.

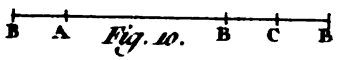


Fig. 10.

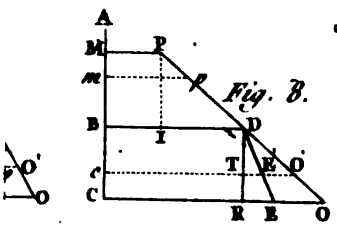


Fig. 8.

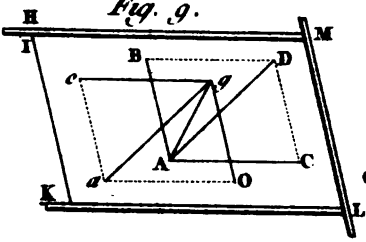


Fig. 9.

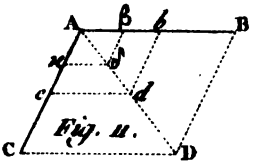


Fig. 11.

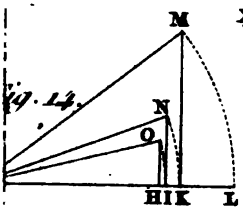


Fig. 14.

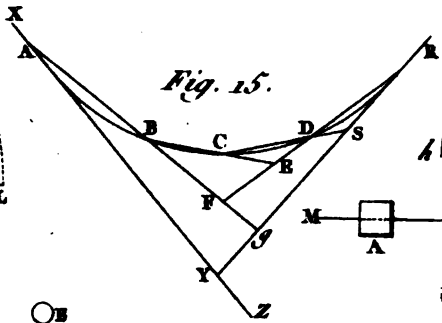


Fig. 15.

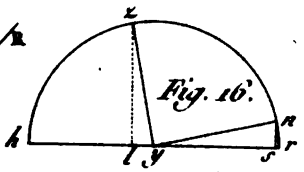


Fig. 16.

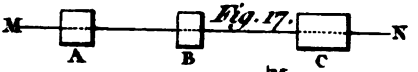


Fig. 17.

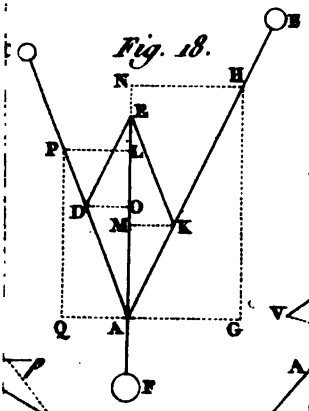


Fig. 18.

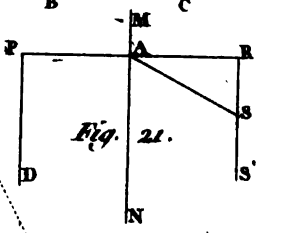


Fig. 21.

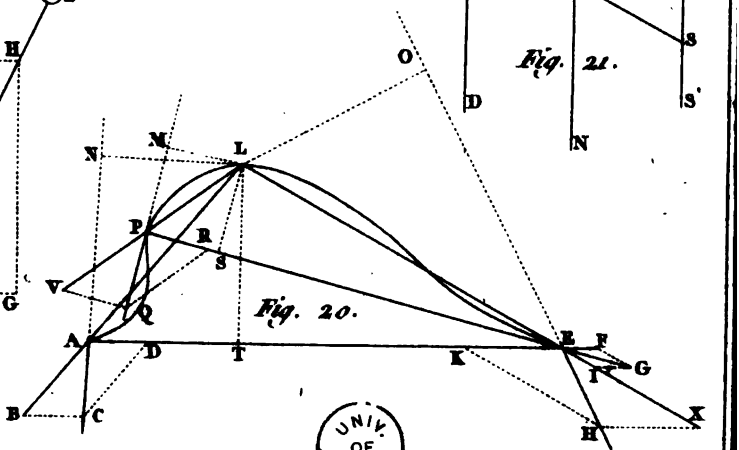
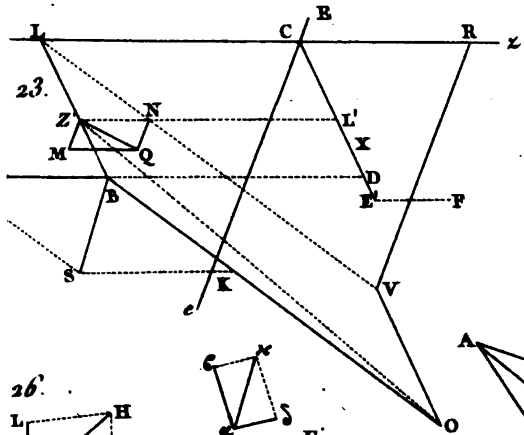


Fig. 20.

UNIV. OF



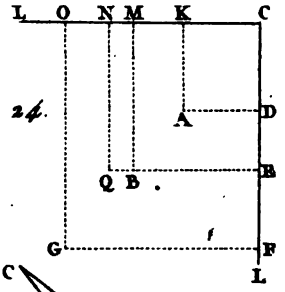


Fig. 24.

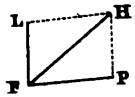
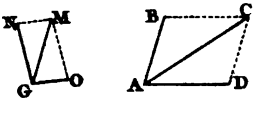


Fig. 27



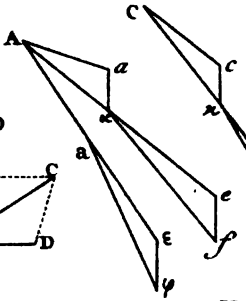
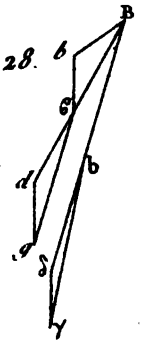


Fig. 28.



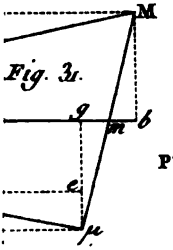


Fig. 31.

Fig. 32.

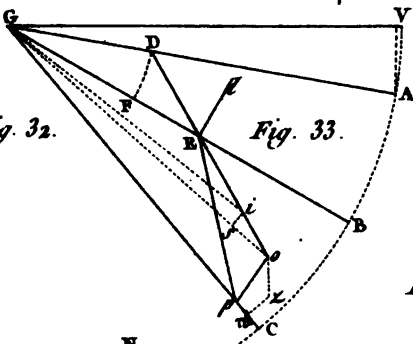


Fig. 33.

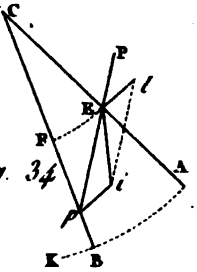
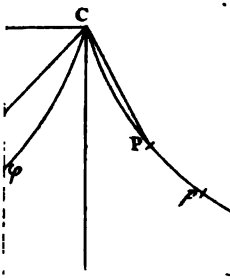


Fig. 34



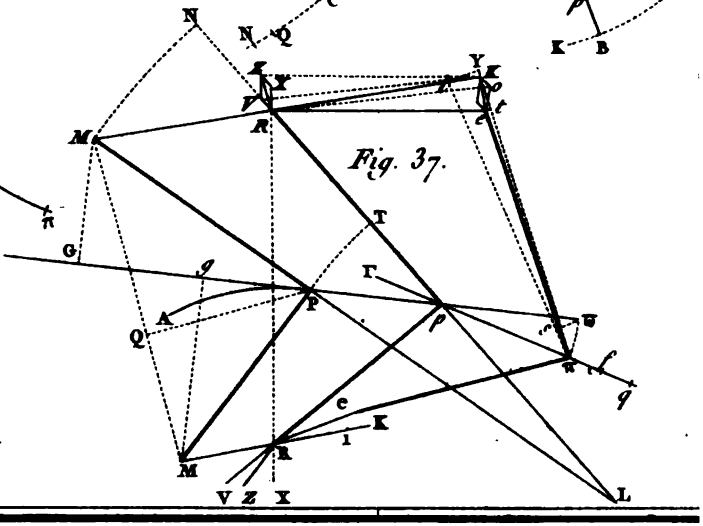


Fig. 37.

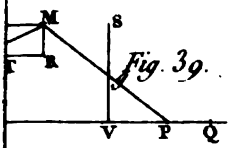


Fig. 39.

Fig.

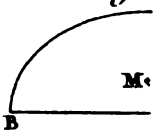
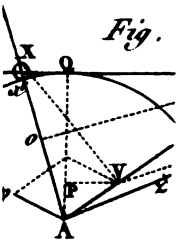
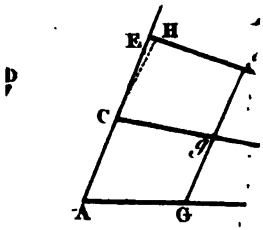
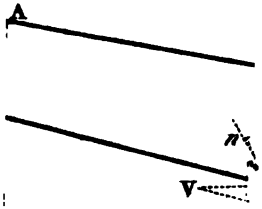
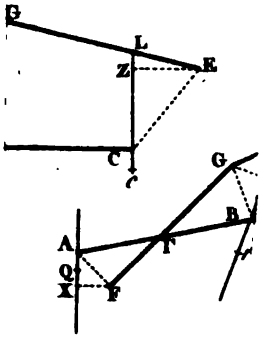
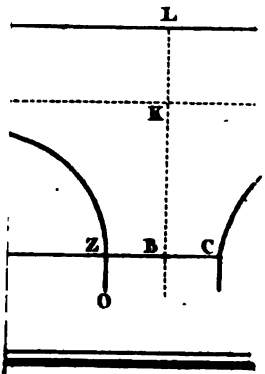


Fig.



d





76.